Colegio de bachilleres

Plantel 3 Iztacalco

Guía para presentar exámenes de Recuperación o Acreditación Especial

MATEMÁTICAS III

CLAVE 304

PROGRAMA DE ESTUDIO 2018

Academia de matemáticas

Elaboró:

- Aguilar Saldo Maricela
- De la Rosa Macías Raúl Edmundo
- Lojero Velazquez Amalia Trinidad

Contenido

INTRODUCCIÓN

La asignatura Matemáticas III, se imparte en el tercer semestre del Colegio de Bachilleres, se organiza de manera vertical y horizontal siguiendo la progresión de los semestres del Plan de Estudios.

La asignatura de Matemáticas III plantea que el estudiante incremente su curiosidad, intuición, ingenio, creatividad e impulse el trabajo autónomo, colaborativo, apoyándose en las TIC privilegiando el software dinámico GeoGebra, que aplique sus conocimientos de geometría y álgebra en el análisis conceptual de lugar geométrico como un objeto matemático que unifica e integra tanto aspectos geométricos como algebraicos.

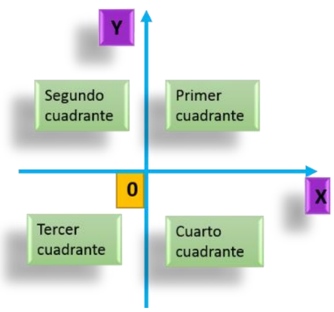
Matemáticas III se organiza en tres cortes de evaluación, cada uno con propósito, contenidos, orientaciones para el aprendizaje, enseñanza, evaluación y fuentes de información:

1. Lugar geométrico: la recta.
2. Lugar geométrico: circunferencia y la parábola
3. Lugar geométrico: elipse e hipérbola

El Colegio de Bachilleres te proporciona con éste material una herramienta que te permita preparar con éxito tus aprendizajes para que seas capaz de presentar el examen de recuperación o acreditación especial de la asignatura.

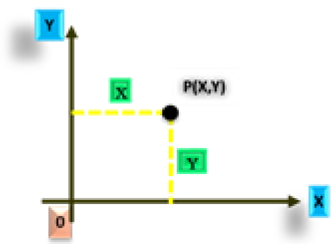
Corte 1. Lugares geométricos básicos: la recta.

1. Sistema cartesiano de coordenadas (plano cartesiano)



El sistema de coordenadas cartesianas en el plano está constituido por dos rectas perpendiculares que se intersectan en un punto “0” al que se le llama “el origen”. Una de las rectas se acostumbra representarla en posición horizontal y se le da el nombre de eje X o eje de las abscisas; a la otra recta, vertical, se le denomina eje Y o eje de las ordenadas, y ambas constituyen los dos ejes de coordenadas rectangulares, los cuales dividen al plano en cuatro partes llamadas cuadrantes.

En este sistema de coordenadas, la posición de un punto P en el plano queda determinada mediante una pareja de números reales (x, y) de los cuales el primero x, representa la distancia del punto P al eje coordenado Y, en tanto que el segundo, y, representa la distancia del punto P al eje X. Esto se representa en la forma:



A la distancia de un punto al eje Y se le llama abscisa del punto, a la distancia de un punto al eje X se le llama ordenada del punto.

Las abscisas (valores de x) son positivas en el primero y en el cuarto cuadrante, en tanto que son negativas en el segundo y en el tercer cuadrante.

Las ordenadas (valores de y) son positivas en el primero y en el segundo cuadrante, en tanto que son negativas en el tercero y en el cuarto cuadrante.

Las abscisas son nulas (x = 0) para todos los puntos contenidos en el eje Y.

Las ordenadas son nulas (y = 0) para todos los puntos contenidos en el eje X.

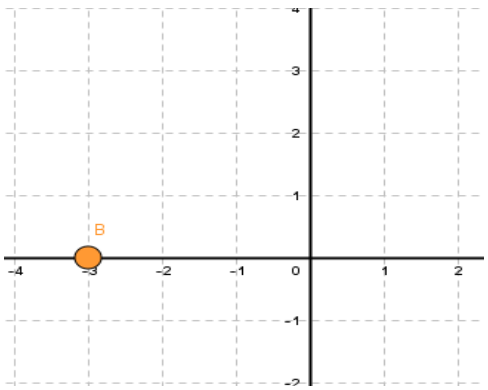
Para representar puntos de coordenadas conocidas se trazan los ejes de coordenadas y se establece una escala adecuada sobre cada uno de ellos. Dichas escalas pueden ser iguales o distintas.

Ejemplos:

1. Las coordenadas del punto A son:

Respuesta: A (4,-2)

2. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B y en que cuadrante se encuentra?

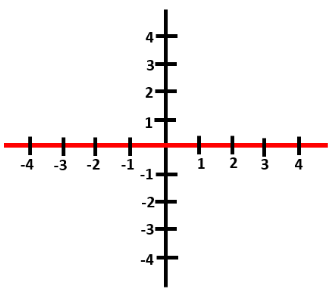


Respuesta: Cuadrante II

B (-3,0)

Ejercicios:

1. En el dibujo siguiente se señala con color rojo el…

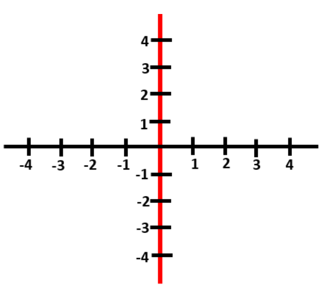


○ Eje de abscisas.

○ Eje de ordenadas.

○ Eje vertical.

2. En el dibujo siguiente se señala con color rojo el…



○ El eje de ordenadas.

○ El eje vertical.

○ Las dos respuestas anteriores son correctas.

3. La primera coordenada de un punto…

○ Siempre se encuentra en el eje X.
○ Siempre se encuentra en el eje Y.
○ Ninguna de las dos respuestas anteriores es correcta.

4. La segunda coordenada de un punto…

○ Se llama abscisa del punto.
○ Se llama ordenada del punto.
○ Ninguna de las dos respuestas anteriores es correcta.

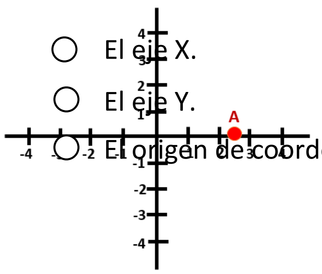
5. El origen de coordenadas es el punto…

- ○ (0, 0)
- ○ Donde se cortan los dos ejes de coordenadas
- ○ Las dos respuestas anteriores son correctas.

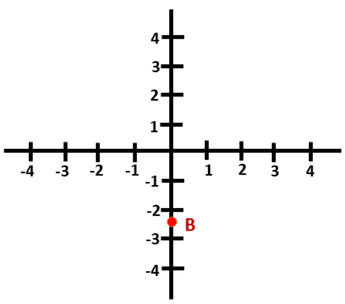
6. Los ejes cartesianos o ejes de coordenadas…

- ○ Siempre son perpendiculares.
- ○ Siempre son secantes y pueden ser o no perpendiculares.
- ○ Las dos respuestas anteriores son correctas.

7. El Punto A se encuentra situado en…



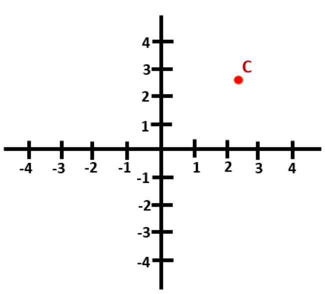
- ○ El eje X.
- ○ El eje Y.
- ○ El origen de coordenadas.



8. El punto B se encuentra situado en…

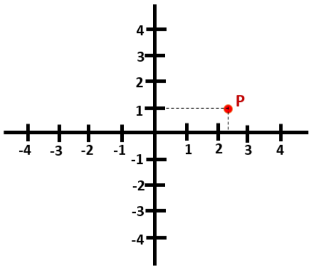
- ○ El eje de abscisas.
- ○ El eje de ordenadas.
- ○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

9. El punto C se encuentra situado en…



- ○ El eje de abscisas.
- ○ El eje de ordenadas.
- ○ Ninguna de las respuestas anteriores es correcta.

10. El punto P de la figura puede tener coordenadas…

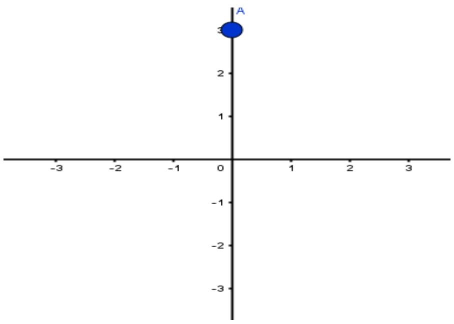


○ P (x, 1).

○ P (1, x).

○ P (1, 1).

11. Las coordenadas del punto A son:

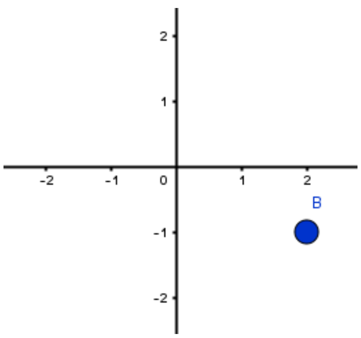


○ A (0, 3).

○ A (3, 3).

○ A (3, 0).

12. ¿Cuáles son las coordenadas del punto B y en que cuadrante se encuentra?



○ B (-1,2).

○ B (2, -1).

○ B (2, 1).

3. Lugar geométrico.

Un lugar geométrico es un conjunto de puntos que satisfacen determinadas propiedades geométricas. Cualquier figura geométrica se puede definir como el lugar geométrico de los puntos que cumplen ciertas propiedades si todos los puntos de dicha figura cumplen esas propiedades y todo punto que las cumple pertenece a la figura.

Es un conjunto de puntos formados por el producto entre dos conjuntos tales que unos subconjuntos de ellos satisfacen una propiedad y que solo estos puntos satisfacen dicha propiedad.

Estos son varios ejemplos de lugares geométricos en el plano:

La recta. El lugar geométrico de los P que equidistan a dos puntos fijos A y B (los dos extremos de un segmento de recta, por ejemplo) es una recta, llamada mediatriz.

Las secciones cónicas pueden ser descritas mediante sus lugares geométricos:

Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto determinado, el centro, es un valor dado (el radio).

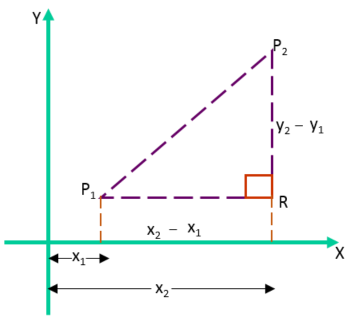
Una elipse es el lugar geométrico de los puntos tales que la suma de su distancia a dos puntos fijos, los focos, es una constante dada (equivalente a la longitud del semieje mayor de la elipse).

La parábola es el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un foco equivale a su distancia a una recta llamada directriz.

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia entre sus distancias a dos puntos fijos, los focos, es igual a una constante (positiva), que equivale a la distancia entre los vértices.

4. Longitud de un segmento de recta

Segmento rectilíneo dirigido. La porción de una línea recta comprendida entre dos de sus puntos se llama segmento rectilíneo o simplemente segmento. Los dos puntos se llaman extremo del segmento: Segmento $\overline{AB}$



Sabemos que el Plano cartesiano se usa como un sistema de referencia para localizar puntos en un plano. Otra de las utilidades de dominar los conceptos sobre el Plano cartesiano radica en que, a partir de la ubicación de las coordenadas de dos puntos es posible calcular la distancia entre ellos. Dados dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) la distancia queda determinada por la relación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Para demostrar esta relación se deben ubicar los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en el sistema de coordenadas, luego formar un triángulo rectángulo de hipotenusa P_1P_2 y emplear el Teorema de Pitágoras.

En la formula se observa que la distancia entre dos puntos es siempre un valor positivo.
El orden en el cual se restan las coordenadas de los puntos P_1 y P_2 no afecta el valor de la distancia.

Ejemplos:

1. Determinar la longitud del segmento determinado por los puntos A (7,5) y B (4,1)

$$d = \sqrt{(4-7)^2 + (1-5)^2}$$

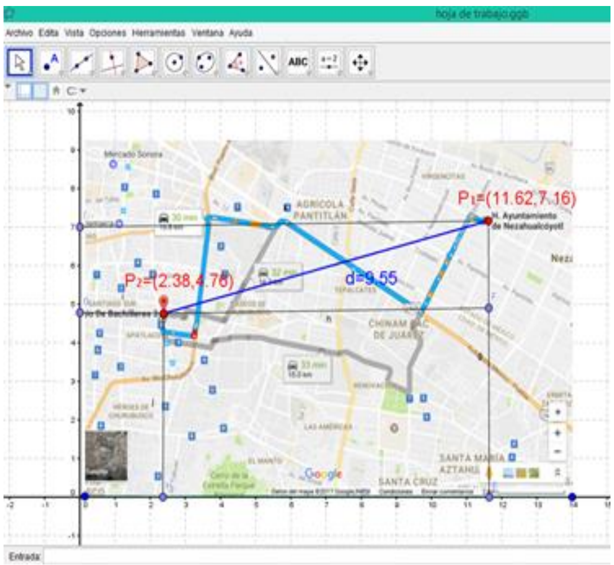
$$d = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$d = \sqrt{9 + 16}$$

$$d = \sqrt{25}$$

d = 5 unidades

2. Determinar la distancia entre la escuela y la casa, representada por los puntos P_1 (2.38, 4.76) y P_2 (11.62, 7.16)



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$d = \sqrt{(11.62 - 2.38)^2 + (7.16 - 4.76)^2}$$

$$d = \sqrt{(9.24)^2 + (2.4)^2}$$

$$d = \sqrt{85.3776 + 5.76}$$

$$d = \sqrt{91.1376}$$

$$d = 9.5466$$

Ejercicios (se sugiere realizar las gráficas):

1. Encuentra la distancia que hay entre el punto A y B de coordenadas (2,4) y (7,4)
2. Determinar la distancia que hay entre el punto P_1(-1/2, 2) y P_2(5/3,-3)
3. Calcular la longitud del segmento de línea cuyos extremos están determinados por los puntos P_1(-2, 3/2) y P_2(3,0)
4. Se desea colocar un anuncio espectacular en la azotea de un edificio, considerando como el origen de un sistema de ejes coordenadas uno de los extremos de la azotea; las cuatro esquinas del espectacular son los puntos A (2, 4), B (7, 4); C (2, 2) y D (7, 2). Para que el espectacular tenga mayor rigidez, se colocarán soporte que vayan del punto B al punto C y del punto A hacia el D, ¿Qué longitud tiene cada uno de los soportes, si cada unidad del plano es igual a 1 m?
   A) 2.45 m
   B) 3.74 m
   C) 4.38 m
   D) 5.39 m
5. La longitud de un segmento rectilíneo es igual a 12, si uno de sus extremos es el punto A (1,-11) y si la ordenada del punto del otro extremo es 4, hallar su abscisa.
6. Comprueba mediante el concepto de distancia entre dos puntos, si el triángulo formado por los puntos A (1,0), B (-2,-2) y C (0,5) es o no un triángulo isósceles.

7. Determinar el perímetro de la figura formada por los puntos A (-6,4), B (-3,-2), C (3,-2), D (6,4) y E (0,8)
8. Determinar el perímetro de la figura formada por los puntos A (4,3), B (-2,3), C (-1,-5) y D (2,-3).
9. Comprueba analíticamente el Teorema de Pitágoras con los puntos (0,0), (5,0) y (5,3).
10. Demuestra que el triángulo cuyos vértices son A (1,1), B (5,1) y C (1,3) es un triángulo rectángulo.
11. Establece el perímetro del triángulo cuyos vértices son A (-2,-6), B (-5,8) y C (6,9).
12. Uno de los extremos de un segmento es el punto (5,8), el otro es (2, y) y la distancia es de 10. Determina el valor de y.

5. Punto medio de un segmento de recta.

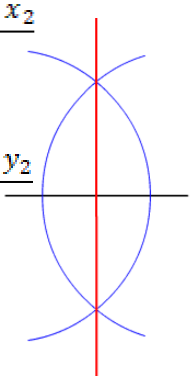
Punto medio en matemática, es el punto que se encuentra a la misma distancia de cualquiera otros dos puntos o extremos de un segmento.

Más generalmente punto equidistante en matemática, es el punto que se encuentra a la misma distancia de dos elementos geométricos, ya sean puntos, segmentos, rectas, etc.

Para determinar las coordenadas del punto medio de un segmento P_m (x_m, y_m) tenemos:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Ejemplos:

1. Determinar las coordenadas del punto medio del segmento que tiene por extremos los puntos B (3,7) y C (5,-5)

$$x_m = \frac{3+5}{2} = 4$$

$$y_m = \frac{7+(-5)}{2} = 1$$

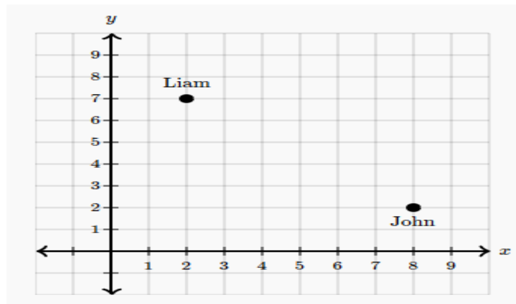
P_m (4,1)

2. Un segmento de recta está determinado por los puntos A y B; el punto medio de dicho segmento tiene coordenadas (-1/2, 1/2) y el punto A (3,2). Determinar las coordenadas del punto B.

$\frac{3+x_2}{2} = -1/2$	$y_m = \frac{2+y_2}{2} = 1/2$
$3 + x_2 = (-\frac{1}{2})(2)$	$2 + y_2 = (\frac{1}{2})(2)$
$x_2 = -1 - 3$	$y_2 = 1 - 2$
$x_2 = -4$	$y_2 = -1$

Ejercicios (se sugiere realizar las gráficas):

1. El punto A está en (-6,8) y el punto B en (6,-7). ¿Cuál es el punto medio del segmento de recta $\overline{AB}$?
2. El punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$ tiene coordenadas (5,8) y el punto P_1 (-1,3). Determinar las coordenadas del punto P_2.
3. El punto medio del segmento $\overline{AB}$ tiene coordenadas (7,3) y el punto A(9,12). Determinar las coordenadas del punto B
4. Liam y John desean encontrarse justo a la mitad de donde viven y sitúan sus casas en un mapa quedando las coordenadas como se observa en la figura. ¿Dónde deben encontrarse?



5. Determinar las coordenadas del punto medio de un segmento determinado por los puntos (-5, ½) y (3, 8/3)
6. Demuestra que las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son los puntos A (-2,-2), B (3,-2), C (5,1) y D (0,1) se cortan en su punto medio.
7. Demuestra que las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son los puntos A (2,4), B (-3,4), C (-1,1) y D (4,1) se cortan en su punto medio.
8. Comprueba que el punto (-1,-2) es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos (4,-2), (-5,1) y (2,2)
9. Comprueba que el punto (2,4) es el centro de la circunferencia que pasa por los puntos (5,4), (2,7) y (-1,4)
10. Calcular la longitud de cada una de las medianas del triángulo cuyas coordenadas son (3,2), (1,-4) y (-5,0).
11. Calcular la longitud de cada una de las medianas del triángulo cuyas coordenadas son (1,3), (0,4) y (-1,1).
12. Calcular el área de un triángulo isósceles cuyos vértices son (5,1), (5,-3) y (2.-1).

6. Pendiente de una recta.

En geometría analítica, el de ángulo de inclinación (α) se emplea junto con el concepto de la pendiente de una recta (m).

$$\tan \alpha = m$$

$$\alpha = \arctan m$$

Algunas consideraciones importantes son:

A. La pendiente de toda recta paralela al eje x es 0.
B. Una recta que forma un ángulo entre 0° y 90° tiene pendiente positiva: $0° < a < 90°$.
C. Una recta paralela al eje y no tiene pendiente.
D. Si la recta forma un ángulo obtuso con el eje de las x, la pendiente es negativa.

Fórmula de la pendiente de la recta que pasa por dos puntos, $A(x_1, y_1)\ y\ B(x_2, y_2)$.

$$m = \tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$con\ x_1 \neq x_2.$

Si multiplicamos el numerador y el denominador por -1 tenemos:

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-y_2 + y_1}{-x_2 + x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

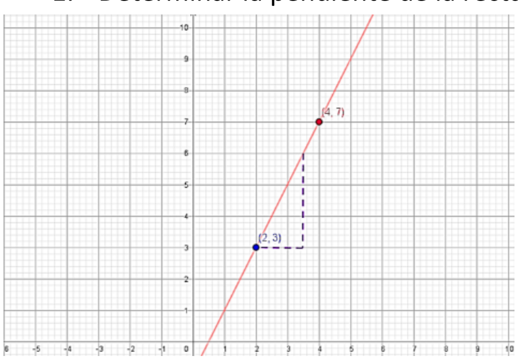
$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Así aceptamos que al aplicar la relación para obtener la pendiente no importa cuál punto designamos como (x_1, y_1) y cuál como (x_2, y_2).

El valor de la pendiente siempre es un número racional.

Ejemplos:

1. Determinar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (2, 3) y (4, 7). Traza la gráfica.



$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \qquad \mathrm{m} = \frac{3-7}{2-4} = \frac{-4}{-2} = 2$$

2. Traza por el punto (-2, -4) una recta cuya pendiente sea $-\frac{2}{3}$.

Sustituyendo en:

$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

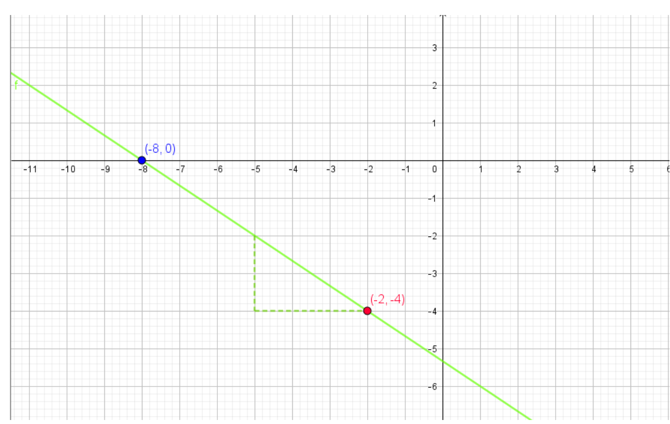
$-\frac{2}{3} = \frac{-4-0}{-2-x_1}$

-2 (-2 – x_1) = -4(3)

4 + 2x_1 = -12

$x_1 = \frac{-16}{2}$

x_1 = -8



Ejercicios:

1. La inclinación de la recta es de 52°. ¿Cuál es su pendiente?

2. La pendiente de una recta es .3476. ¿Cuál es su inclinación?

3. La pendiente de una recta es -1.804 ¿Cuál es su inclinación?

4. Aplicando el concepto de pendiente, demuestra que los puntos $\left(-\frac{3}{2}, 8\right), (-1, 5)$, (1, -7) son o no colineales.

5. Calcula la pendiente de la recta que une los puntos (-2, 3) (2, 4).

6. Encuentra la pendiente de las siguientes inclinaciones:

a) a = 23° b) a = 180° c) a = 175° d) a = 18°

7. Determina si los puntos son colineales:

A (-4, -5) B (0. -3) C (8, 1)

8. Dadas las pendientes, determina los ángulos de inclinación:

a) a = -2 b) a = -1/3 c) a = 1 d) a = 1/2

9. Calcula la pendiente de la recta que une los puntos (-1/2, 2) (4, 6).

10. Traza por el punto (-3, -2) una recta cuya pendiente sea 2.

11. Traza por el punto (3, -2) una recta cuya pendiente sea $-\frac{1}{2}$.

12. Calcula la pendiente de la recta que une los puntos (-2,3) (3, -5).

7. Rectas paralelas y perpendiculares.

Dos rectas son paralelas, si no se intersectan, es decir, si no se cortan en algún punto.

Si dos rectas tienen la misma pendiente, son paralelas. Aunque la tangente del ángulo sea $+\infty$ $o - \infty$, las rectas perpendiculares al eje x son paralelas entre sí.

$m_1 = m_2$

Dos rectas son perpendiculares si se cortan en ángulos rectos.

Dos rectas son perpendiculares si la pendiente de una recta es la recíproca negativa de la pendiente de la otra.

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$ entonces $m_1 m_2 = -1$

Ejemplos:

1. Determina si la recta que pasa por los puntos (6, 0), (0, 4) y la que pasa por (0, 2), (3, 0) son paralelas.

Resolución:

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituimos:

Pendiente m de la recta que pasa por (6, 0), (0, 4):

$$\mathrm{m} = \frac{0-4}{6-0} = -\frac{2}{3}$$

Pendiente m de la recta que pasa por (0, 2), (3, 0):

$\mathrm{m} = \frac{2-0}{0-3} = -\frac{2}{3}$ Sol: Son paralelas porque sus pendientes son iguales.

2. Demuestra que la recta que pasa los puntos (2, 5), (-3, -2) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (4, -1) con $\left(-\frac{8}{5}, 3\right)$

$$\mathrm{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{5-(-2)}{2-(-3)} = \frac{5+2}{2+3} = \frac{7}{5}$$

$$m_2 = \frac{3-(-1)}{\frac{-8}{5}-(4)} = \frac{3+1}{\frac{-8}{5}-(4)} = \frac{4}{\frac{-8-20}{5}} = \frac{-5}{7}$$

$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

Sustituimos:

$$\frac{-5}{7} = -\frac{1}{\frac{7}{5}}$$

$-\frac{5}{7} = -\frac{5}{7}$ Sol: Son perpendiculares porque sus pendientes cumplen la condición.

Ejercicios:

1. Comprobar si la recta que une a los puntos A (1,−3) y B (5,0) y la recta que une a C (−3,0) y D (1,3) son rectas paralelas.

2. Empleando el concepto de pendiente, determine que los puntos A (-2,-2), B (3,-2), C (5,1) y D (0,1) son los vértices de un paralelogramo.

3. Empleando el concepto de pendiente, determine que los puntos A (1,1), B (5,1) y C (1,3) son los vértices de un triángulo rectángulo.

4. Las pendientes de cuatro segmentos de recta respectivamente son:

$m_1 = \frac{2}{5}, m_2 = \frac{4}{-10}, m_3 = \frac{5}{2}\ y\ m_4 = \frac{10}{-4}$. Determinar qué par de rectas son perpendiculares entre sí.

A) m_1 y m_2
B) m_2 y m_3
C) m_2 y m_4
D) m_3 y m_4

5. Una recta pasa por los puntos (3,3) y (-6,-3), otra recta pasa por los puntos (2,-8) y (-6,4). Determine por medio de sus pendientes si son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

6. Una recta pasa por los puntos (-3,14) y (1,-2), otra recta pasa por los puntos (0,-3) y (-2,5). Determine por medio de sus pendientes si son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

7. Una recta pasa por los puntos (4,-3) y (-8,0), otra recta pasa por los puntos (-1,-1) y (-2,6). Determine por medio de sus pendientes si son paralelas, perpendiculares u oblicuas.

8. Demuestra que la recta que pasa por los puntos A (-2,-1) y B (1,5) es paralela a otra recta que pasa por los puntos C (-1,4) y D (1,8).

9. Demuestra que la recta que pasa por los puntos A (1,1) y B (2,0) es perpendicular a otra recta que pasa por los puntos C (-1,1) y D (-2,0).

10. ¿Qué pendientes de la siguiente tabla pertenecen a rectas perpendiculares?

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4
$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{6}$

11. En la siguiente tabla se presentan las pendientes de cuatro líneas rectas, determina que rectas son paralelas entre sí.

ℓ_1	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5
3	$\frac{6}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	-3

12. Un arquitecto debe construir una valla que une a los puntos A (3,7), B (4,−4), C (−5,−1) y D (−3,5). Responda: ¿Alguno de los segmentos que conforman la valla son paralelos o perpendiculares?

8. Formas de la Ecuación de la recta: ordinaria y general

- La forma ordinaria de la ecuación de la línea recta es: $y=mx+b$

Donde m es la pendiente y b la ordenada al origen.

- La forma general de la ecuación de la línea recta es: $Ax+By+C=0$

9. Ecuación de la recta dada la pendiente y un punto (Ecuación punto-pendiente de la recta)

Para determinar la Ecuación punto-pendiente de la línea recta se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Determinar la Ecuación de la recta en su forma general.

Supongamos que una recta pasa por el punto A(x_1, y_1), cuyas coordenadas sean (2, -4) y la pendiente $\frac{2}{3}$; queremos determinar la ecuación de la recta que reúne estas dos condiciones y trazar la gráfica.

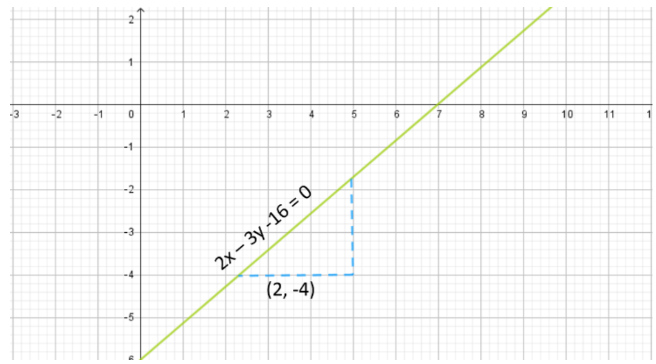
Si sustituimos en la relación “pendiente de una recta”

$$\text{m} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Por propiedad simétrica de la igualdad, queda:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = m$$

Gráficamente:



Sustituyendo los valores de A (2, -4):

$$\frac{y_2 - (-4)}{x_2 - (2)} = \frac{2}{3}$$

Desarrollamos:

$y + 4 = \frac{2}{3}(x - 2)$

$y + 4 = \frac{2x}{3} - \frac{4}{3}$

$3y + 12 = 2x - 4$

$3y - 2x + 12 + 4 = 0$

Multiplicamos por -1 ambos miembros y simplificamos:

$2x - 3y - 16 = 0$ Ecuación general de la línea recta

Generalizando para una recta que pasa por el punto A (x_1, y_1) y con pendiente m, queda:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1} = m$$

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Luego despejamos y obtenemos:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Ecuación punto-pendiente de la línea recta.

Ejemplo 2:

Determina en su forma ordinaria la ecuación de la recta que pasa por el punto (-1, 3) cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$. Traza la gráfica.

Resolución:

Sustituimos en:

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

$y - (3) = -\frac{1}{2}x - (-1)]$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 1)$

$y - 3 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} + 3$

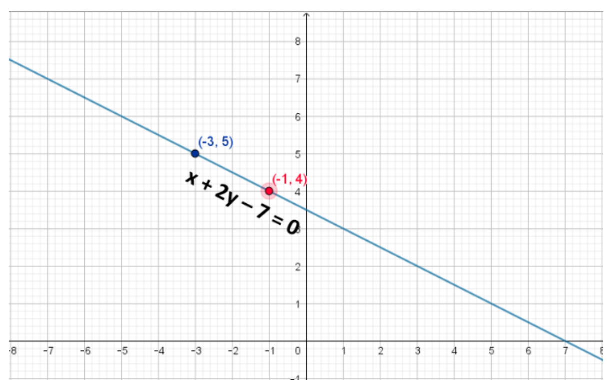
$y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ Ecuación ordinaria de la línea recta.

10. Ecuación de la recta dados dos puntos (Ecuación punto-punto de la recta)

Para obtener la Ecuación punto-punto de la línea recta se tiene el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1:

Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1, 4) y (-3, 5). Traza la gráfica.



Para resolver este problema, calculamos la pendiente m de la recta que pasa por los dos puntos, y a continuación, usando cualquiera de los dos puntos, obtenemos la ecuación de la recta aplicando la relación punto-pendiente.

Resolución:

Sustituimos en:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{4 - (5)}{-1 - (-3)} = \frac{4 - 5}{-1 + 3} = -\frac{1}{2}$$

Sustituimos en:

$y - y_1 = m\ (x - x_1)$

Como podemos emplear cualquiera de los dos puntos, utilizaremos (-1, 4) y la pendiente $-\frac{1}{2}$

$y - (4) = -\frac{1}{2}[x - (-1)] = -\frac{1x}{2} - \frac{1}{2}$

$2y - 8 = -x - 1$

$x + 2y - 8 + 1 = 0$

$x + 2y - 7 = 0$ Ecuación general de la línea recta

Generalmente, para una recta que pasa por los puntos A (x_1, y_1) y B (x_2, y_2), y recordando que la pendiente de la recta que pasa por los puntos citados es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Sustituimos el valor de m en la relación de punto-pendiente:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

Así obtenemos: La relación para obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ Ecuación punto-punto de la línea recta

Ejemplo 2:

Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1, 4) y (-3, 5).

Resolución:

Sustituimos en:

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

$y - (4) = \frac{5-(4)}{-3-(-1)}[x - (-1)]$

$y - 4 = \frac{5-4}{-3+1}(x + 1)$

$y - 4 = \frac{1}{-2}(x + 1)$

$y - 4 = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$2y - 8 = -x - 1$

$x + 2y - 8 + 1 = 0$

$x + 2y - 7 = 0$

Ejercicios:

1. Determina la ecuación de la recta de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y que pasa por el punto (-2, 5)

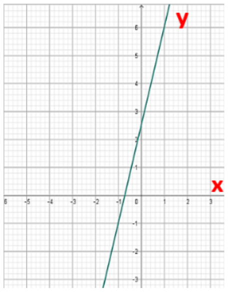
2. Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2) y tiene inclinación 71°33’54.18”

3. Encuentra la ecuación de la recta que equidista de los puntos (8, 0) (1, 3)

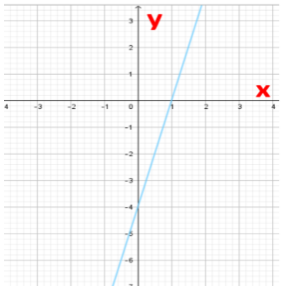
4. ¿Qué condición deben cumplir A, B y C para que la ecuación Ax + By + C = 0 sea una recta?

5. Cuál es la gráfica que corresponde a la recta de la ecuación -5x – y + 4 = 0?

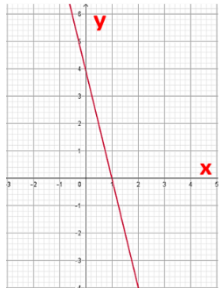
A)



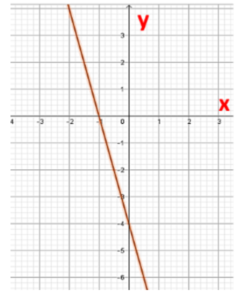
B)



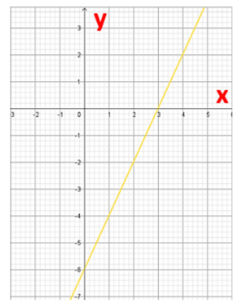
C)



D)



6. Observa la siguiente gráfica y determine la ecuación ordinaria que le



corresponde.

A) y = 2x – 6
B) y = 2x + 6
C) y = -2x + 6
D) y = -2x – 6

7. Encuentra los valores A, B, C de la recta Ax + By + C = 0 que pasa por el punto (2, 3) y su pendiente es m = $\frac{1}{2}$. Sustituye en la ecuación el punto pendiente.

8. Usando la ecuación punto pendiente encuentra la inclinación de la recta 2x – y + 1 = 0. Encuentra además el punto donde interseca al eje x.

9. Determina la ecuación de la recta que pasa por (0, 1) y tiene pendiente m = $\frac{1}{3}$

10. Determina la ecuación de la recta que pasa por el origen y tiene pendiente m = 0

11. Transforma la ecuación x + $\frac{1}{2}y - 3 = 0$ a la forma punto pendiente.

12. Determina la ecuación de la recta que pasa por (-1, 4) (2. 3).

Ejercicios de reforzamiento.

1. Los puntos A (-3,8) y B (5,-2) son extremos de un segmento.
   a) Calcula el punto medio

   b) Determina las coordenadas del punto P que divide al segmento en una razón de $r = \frac{2}{5}$

   c) Traza la gráfica, localiza los puntos obtenidos en a) y b)

2. Traza el triángulo cuyos vértices son los puntos: A (2,1) B (5,2) C (-2,1). Determina el perímetro. Calcula la magnitud del ángulo A

3. Una recta pasa por el punto Q (-5,4) y tiene pendiente $m = \frac{5}{9}$.
   a) Determina la ecuación de ésta recta, en su forma general
   b) Escribe la ecuación de la recta anterior en su forma ordinaria
   c) Transforma la ecuación a su forma simétrica.
   d) Traza la gráfica.
   e) Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto P (2,3) y es paralela a la anterior. Traza la gráfica.
   f) Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto P (3,2) y es perpendicular a la obtenida en el). Traza la gráfica

Fuentes de información

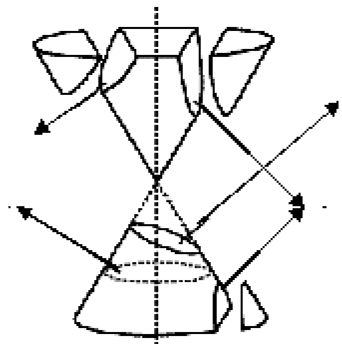
- Fuenlabrada, S. (2007) Geometría analítica. McGraw-Hill Interamericana. México.
- math2me. (s.f.) Recuperado de https://math2me.com/ el 9 de septiembre de 2018.
- Khan Academy (2018) Recuperado de https://es.khanacademy.org/ el 9 de septiembre de 2018.
- MateFacil (2018) Curo de geometría analítica. Recuperado de
- https://www.youtube.com/playlist?list=PL9SnRnlzoyX2ksvCQ2e3_uIB5SxhnpbyF el 9 de septiembre de 2018.
- Wikipedia. (2018) Recuperado de https://es.wikipedia.org/wiki/Punto_medio el 9 de septiembre de 2018
- UNAM (s.f) Lecciones de geometría analítica. Recuperado de
- http://www.objetos.unam.mx/matematicas/leccionesMatematicas/index_geometria.html el 9 de septiembre de 2018.
- Matesfacil. Rectas paralelas y perpendiculares. Recuperado de
- https://www.matesfacil.com/ESO/geometria_plana/paralelas/problemas-resueltos-rectas-paralelas-perpendiculares-pendiente-puntos.html el 9 de septiembre de 2018.
- Sistema Cartesiano de coordenadas (Abril 2011) UNAM, Facultad de ingeniería. Recuperado de http://dcb.fi-c.unam.mx/CoordinacionesAcademicas/Matematicas/CapsulasAntecedentes/simetria.pdf el 9 de septiembre de 2018.

Corte 2. La circunferencia y la parábola

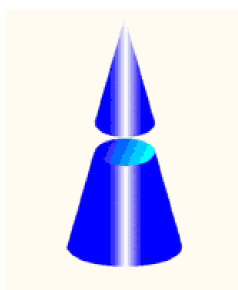
1. Secciones cónicas

“Cortes en el cono”

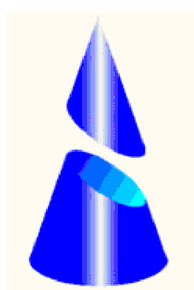
1. Cortes a un cono que dan lugar a las curvas cónicas



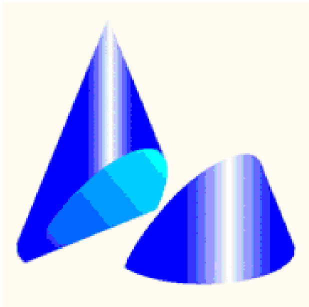
2. El corte para una circunferencia se indica en la figura siguiente



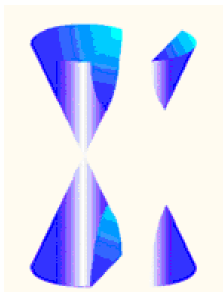
3. El corte para una elipse se indica en la figura siguiente

4. 

4. El corte para una parábola se indica en la figura siguiente

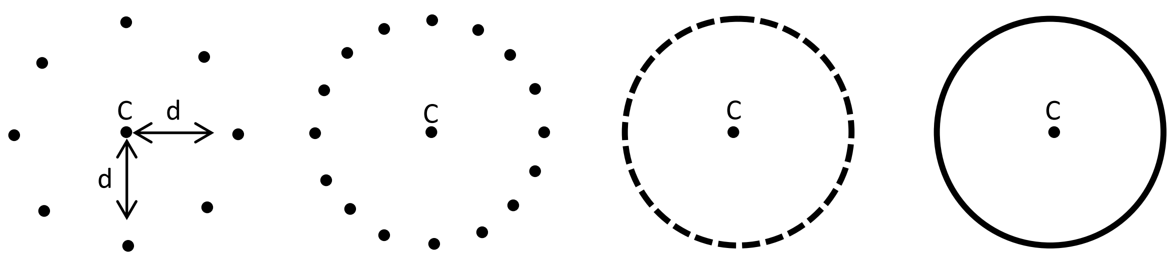


5. El corte para una hipérbola se indica en la figura siguiente

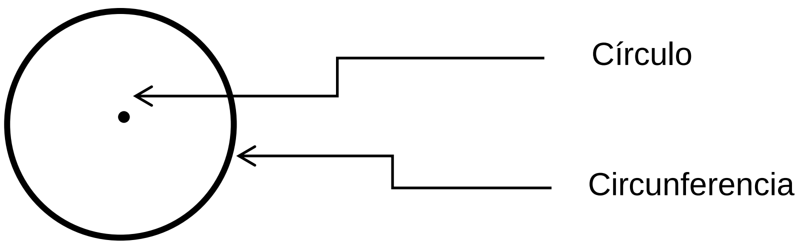


2. Circunferencia

Es el conjunto de todos los puntos en un plano que están a la misma distancia de referencia llamado centro (c).

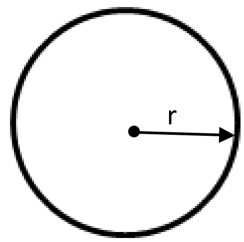
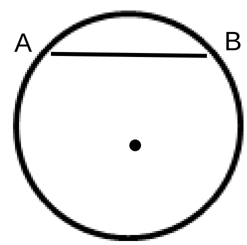


El círculo es el área limitada por la circunferencia.



Entonces la circunferencia tiene unidades de longitud y el círculo tiene unidades de superficie.

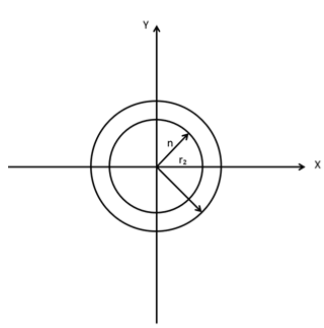
PUNTOS Y LINEAS IMPORTANTES.

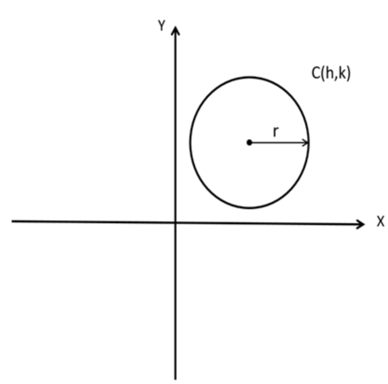
Radio (r): Es el segmento de recta que une el centro con un punto de la circunferencia.	
Cuerda (AB): Es la recta que une dos puntos de la circunferencia	
Diámetro (D): Es la cuerda que pasa por el centro su longitud es dos veces el radio. D=2r	
Tangente: Es la reta que toca en un punto a la Circunferencia. A ese punto se le llama: punto de tangencia	
Secante: Es la recta que corta en dos puntos a la Circunferencia	

Una circunferencia está definida conociendo la ubicación del centro y la longitud del radio

ECUACIONES DE LA CIRCUNFERENCIA

El centro está ubicado en el origen del plano. Podemos trazar infinidad de circunferencias, las cuales se diferencian por la longitud de sus radios.





Ecuación ordinaria de una circunferencia con centro en el origen y radio r

$$\boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

.

Ecuación ordinaria de la circunferencia con centro fuera del origen C (h, k)

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Ecuación General de la circunferencia

Si en la ecuación de la forma

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Se desarrollan los binomios y se reducen términos semejantes, llegamos a la ecuación que toma la forma

$$x^2 + y^2 + DX + EY + F = 0$$

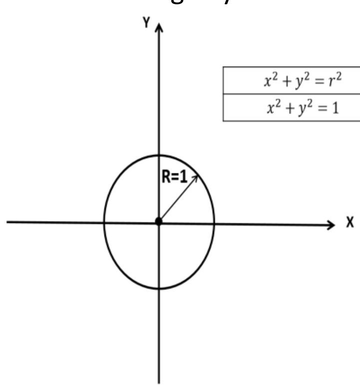
Dónde: D, E y F son constantes, los coeficientes de x^2 y y^2 son uno.

A la forma anterior de la ecuación se le llama forma general de la ecuación de la circunferencia.

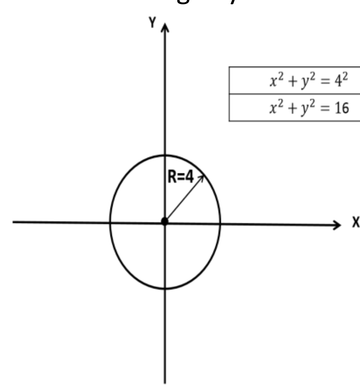
Ejemplos:

En cada uno de los siguientes ejemplos, encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia. Traza su gráfico.

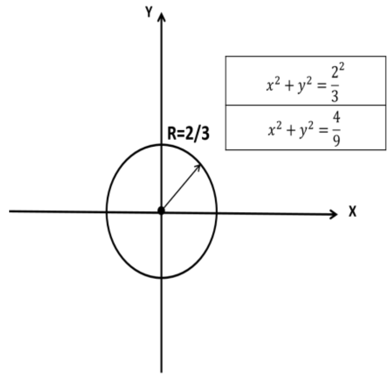
1) centro en el origen y r=1



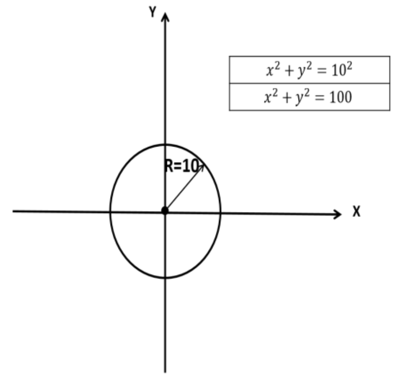
2) centro en el origen y r=4



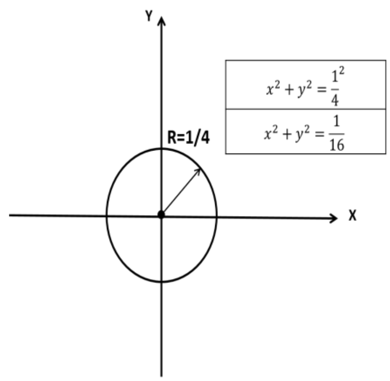
3) centro e el origen y r=2/3



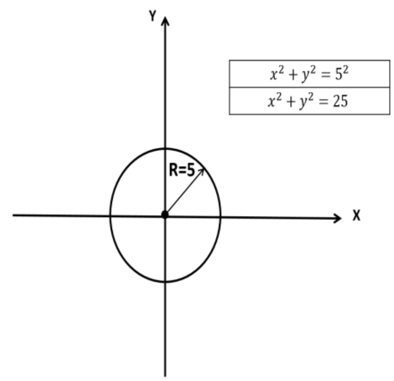
4) centro en el origen y r=10



5) centro en el origen y r=1/4



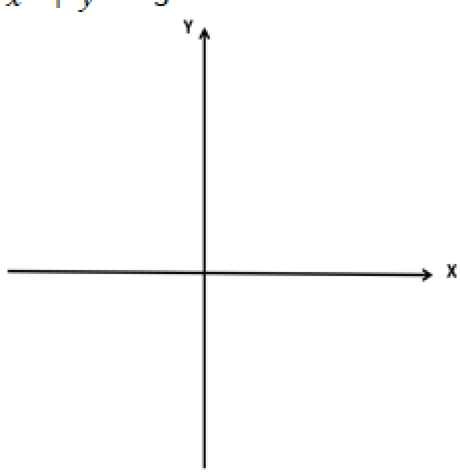
6) centro en el origen y r=5



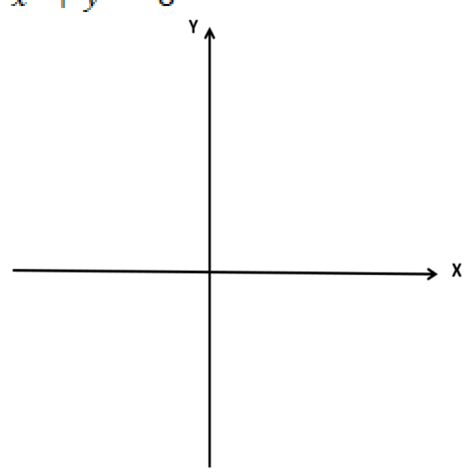
Ejercicios.

A partir de la ecuación ordinaria traza el grafico de las siguientes circunferencias.

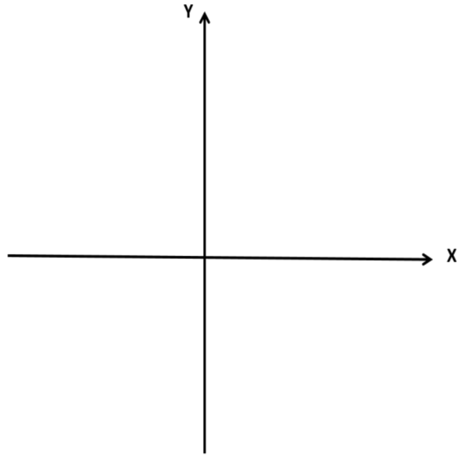
1) $x^2+y^2=3^2$



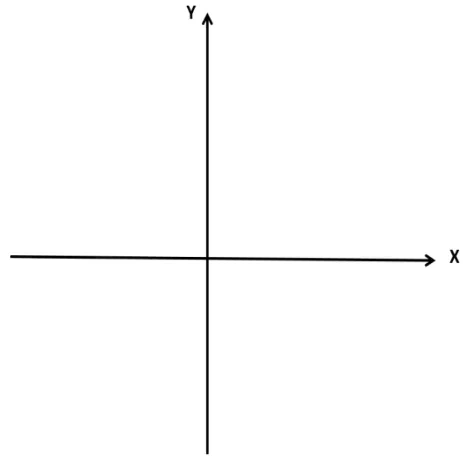
2) $x^2+y^2=8^2$



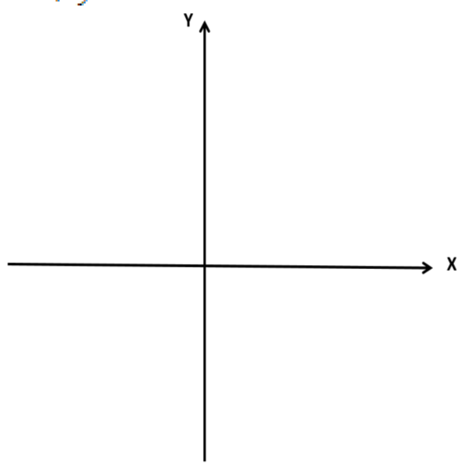
3) $x^2 + y^2 = 49$



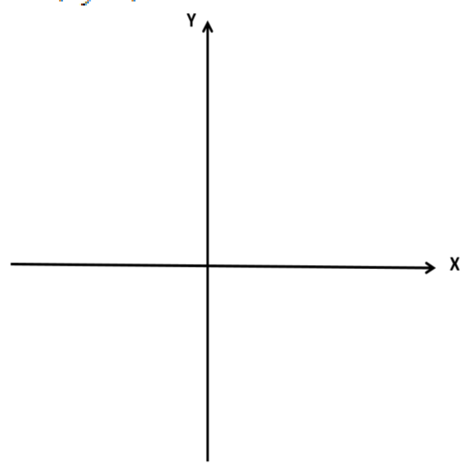
4) v$x^2 + y^2 = \frac{4}{25}$



5) $x^2 + y^2 - 100 = 0$



6) $x^2 + y^2 + 81 = 0$



Encuentra la ecuación ordinaria de la circunferencia, traza su gráfico.

1) Centro en el origen y r=2	2) Centro en el origen y r=1/3
3) Centro en el origen y r=11	4) Centro en el origen y r=4/9
5) Centro en el origen y r=1/2	6) Centro en el origen r=1/16

Ejemplos:

En cada caso encuentra la ecuación ordinaria y general de la circunferencia dada las condiciones trazar su gráfico.

<table>
<tr>
<td>

1) centro en el punto (2,3) y r=1

De la forma

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Sustituimos y desarrollamos

Forma ordinaria:

$\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=1^2}$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9-1=0$

Forma general:

$\boxed{x^2+y^2-4x-6y+12=0}$

</td>
<td>

2) centro en el punto (-1,-2) y r=3

De la forma

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

Sustituimos y desarrollamos

$(x-(-1))^2+(y-(-2))^2=3^2$

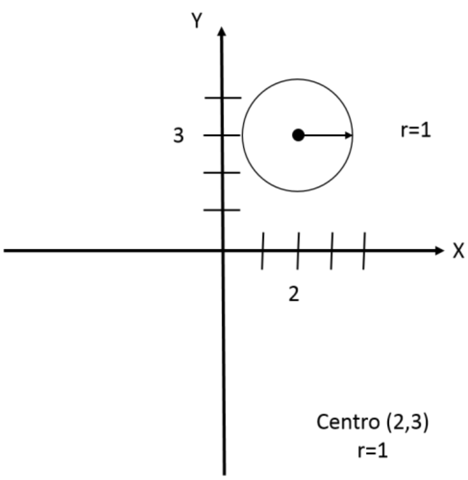
$\boxed{(x+1)^2+(y+2)^2=3^2}$

Forma ordinaria.

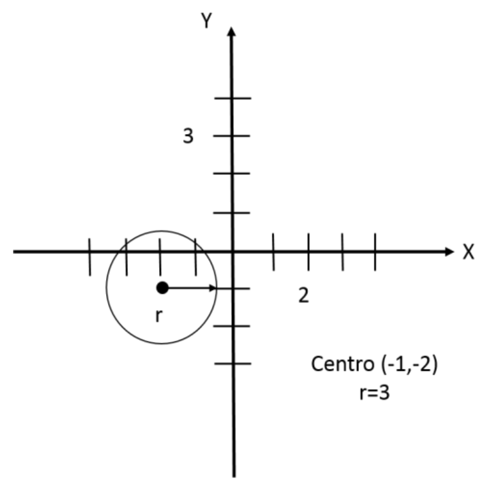
$x^2+2x+1+y^2+4y+4-9=0$

$\boxed{x^2+y^2+2x+2y-4=0}$

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Ejercicios.

En cada uno de los siguientes ejercicios, encuentra la ecuación ordinaria y general, así como traza su gráfico.

1) Centro en (4,-1) y r=2	2) Centro en (3,1) y r=4
3) Centro en (-2,-3) y r=2	4) Los puntos, A (-4,7) y B (10,3) corresponden a los extremos de uno de sus diámetros.

Identifica el centro y el radio de las siguientes circunferencias

1) $x^2 + y^2 = 64$ Centro: Radio:	2) $x^2 + y^2 = 1$ Centro: Radio:
3) $x^2 + y^2 - 4 = 0$ Centro: Radio:	4) $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 8^2$ Centro: Radio:
5) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 100$ Centro: Radio:	6) $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$ Centro: Radio:
7) $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 1$ Centro: Radio:	8) b$(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 7$ Centro: Radio:

Ejercicios

1.- Determina la ecuación de la circunferencia de diámetro el segmento formado por los puntos $A(-4{,}7)$ y $B(6,-1)$
2.- Determina la ecuación de la circunferencia de centro en el punto $C(1,-3)$ y que pasa por el punto $(4;3)$
3.-Obten la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(-4{,}2)$ y diámetro 8 unidades
4.- Una circunferencia tiene su centro en el eje de X y pasa por los puntos $(-1,5)$ y $(2{,}3)$
5.-El centro de una circunferencia está en el eje de las Y y pasa por el punto $(0,-2)$ y $(3,-6)$ Encuentra su ecuación
6.- Una circunferencia tiene su centro en $(0,-2)$ y es tangente a la recta $5x - 12y + 2 = 0$ Cual es su ecuación
7.- Cual es la ecuación de la circunferencia con centro en $(4,-3)$ y que es tangente a la recta

$3x + 4y - 10 = 0$
8.- El radio de la circunferencia es 4 y su centro está en las intersecciones de las rectas $x + 3y - 7 = 0$ y $2x + 5y - 12 = 0$
9. El diámetro de una circunferencia es el segmento de recta definido por los puntos: $A(-8, -2)\ y\ B(4{,}6)$ Obtener la ecuación de dicha circunferencia
10. Determina la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $4x - 3y - 6 = 0,\ 3x + y + 13 = 0$, además es tangente a la recta $5x + 12y - 106 = 0$
11. Una circunferencia pasa por el punto $(1, -6)$ y su centro está en la intersección de las rectas $4x - 7y + 10 = 0$ y $7x + 3y - 13 = 0$
12.Comprobar que la recta $2y + x = 10$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ y determinar el punto de tangencia.
13.-Circunferencia de centro $C\ (-3, 4)$ y radio 5. Comprueba que pasa por el origen de coordenadas
14.- Hallar la ecuación de la circunferencia de centro $C(2, 3)$ y tangente a la rectas $4x - 3y + 6 = 0$.
15.- Halla la ecuación de la circunferencia tangente a la recta $4x + 3y - 25 = 0$ y cuyo centro es el punto de intersección de las rectas $3x - y - 7 = 0\ y\ 2x + 3y - 1 = 0$.

A partir de la ecuación general de la circunferencia.

$$X^2 + Y^2 + DX + EY + F = 0$$

Podemos conocer la longitud del radio de la siguiente forma:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$$

Y las coordenadas del centro están dadas por:

$$c\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right)$$

Eso es:

h= $-\frac{D}{2}$

k= $-\frac{E}{2}$

Sí el termino $D^2 + E^2 - 4F = 0$, la ecuación representa un punto.

Si, el termino $D^2 + E^2 - 4F < 0$, la circunferencia no es real.

Ejemplo 1

A partir de la ecuación general de la circunferencia

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Determina:

a) la longitud del radio
b)
c) las coordenadas del centro

solución:

a) $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2 + 6^2 - 4(-12)}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 36 + 48}$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{100} \Rightarrow r = 5$$

b) $h = -\frac{D}{2}$ $\qquad h = -\left(-\frac{4}{2}\right) = 2$

$k = -\frac{E}{2}$ $\qquad k = -\frac{6}{2} = -3$

C (2, -3)

EJEMPLO 2

a partir de la ecuación general de la circunferencia

$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 47 = 0$

Determina:

a. la longitud el radio
b. las coordenadas del centro
c. el área del circulo
d. la representación grafica

solución:

a. $r = \frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2 + (8)^2 - 4(47)}$

$r = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \frac{1}{2}(4.5)$ ⇨ r = 2.25

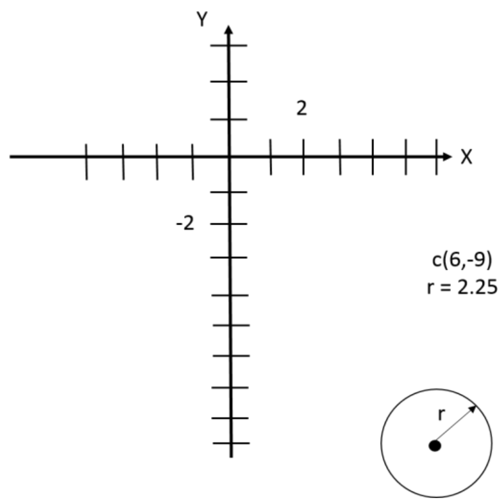
a) $h = -\left(-\frac{12}{2}\right) = 6$

$k = -\frac{8}{2} = -4$

c (6,-4)

b) ⇨ A = π r² = π (2.225) ² A=15.9 m²

c)



EJERCICIOS

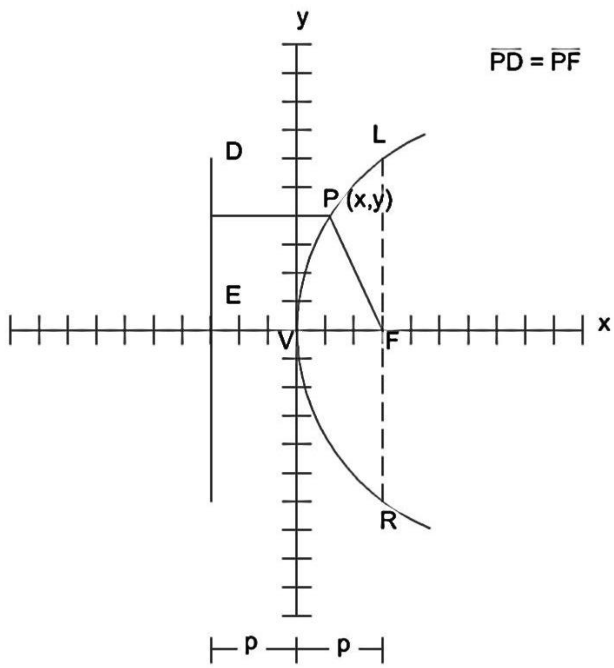
1.- Determina el centro y el radio de la siguiente circunferencia $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$
2.- Determina el centro y el radio de las siguiente circunferencia $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 20 = 0$
3.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14 = 0$
4.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0$
5.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $9x^2 + 9y^2 - 12x + 36y - 104 = 0$ Trazar la circunferencia
6.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia dada por la ecuación: $4x^2 + 4y^2 + 4x + 4y - 2 = 0$
7.- Encontrar el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es $2x^2 + 2y^2 + 10x - 6y + 3 = 0$

3. PARABOLA.

Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano que equidistan de una recta fija, llamada directriz y de un punto fijo llamado foco.

La parábola es una figura cónica porque se puede obtener haciendo cortes en un cono circular recto doble con un plano.

Elementos de una parábola:



EF Eje focal. Recta que divide a la parábola en dos curvas iguales.

D Directriz, Recta perpendicular al eje focal.

F Foco. Punto fijo en el eje focal.

V Vértice. Punto que corta al eje focal.

LR Lado recto. Es el segmento que indica el ancho de La parábola, es perpendicular al eje focal, mide cuatro veces La distancia del vértice al foco.

P Distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.

P Un punto cualquiera de la parábola (x, y).

Parábola con vértice en el origen.

Dada una parábola con vértice en el origen, foco $F(p, 0)$ donde p es la distancia del vértice al foco y la directriz es $x = -p.$ Y con un punto $P(x, y)$ que la condición sea que la distancia sea la misma al foco y a la directriz es decir:

$$\overline{PF} = \overline{PD}$$

Al aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$ y la distancia de un punto a una recta

$d = \frac{Ax + By\ C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, se obtiene la distancia del punto P al foco y a la directriz.

La distancia de P al foco es:

$$\overline{PF} = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

La distancia de P a la recta x + p =0

$$\overline{PF} = \frac{1(x) + 0(y) + p}{\sqrt{(1^2) + (0^2)}} = x + p$$

Se igualan las distancias:

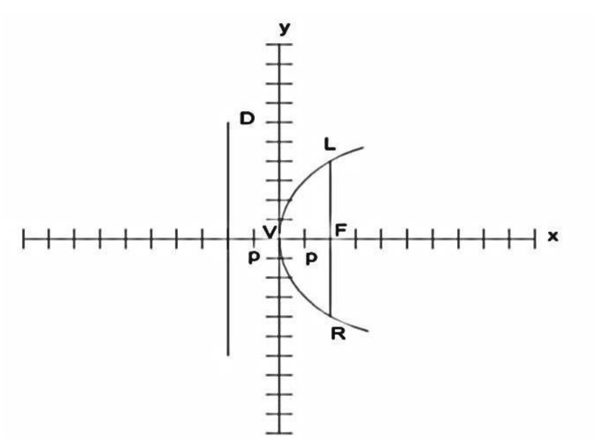
$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = x + p$$

Se eleva al cuadrado ambos miembros, desarrollando los binomios elevados al cuadrado:

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = (x+p)^2$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Igualando a cero y simplificando:

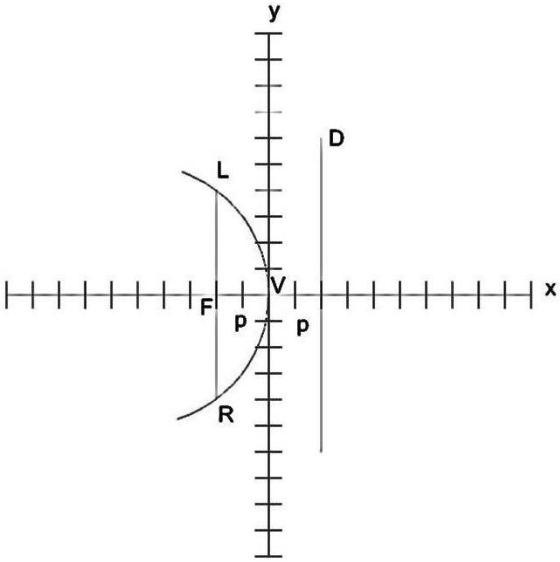


$x^2 - 2px + p^2 + y^2 - x^2 - 2px - p^2 = 0$

$$y^2 - 4px = 0$$

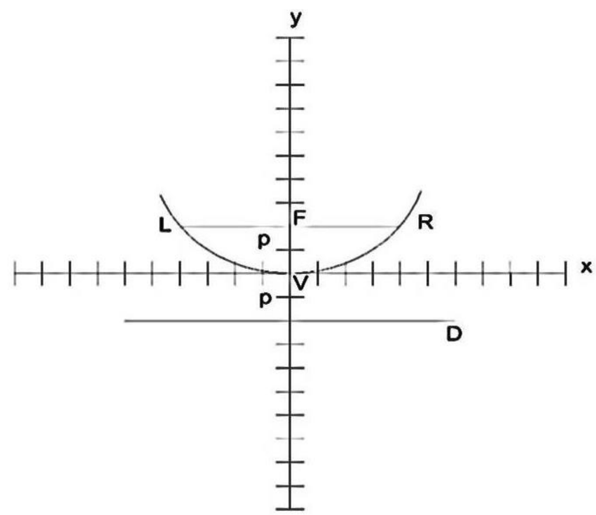
Ecuación de la parábola con vértice en el origen. Eje focal horizontal en el eje de las x. abre hacia la derecha. Su forma es canónica. $y^2 = 4px$

En forma semejante, se puede demostrarlas ecuaciones siguientes:



Ecuación de la parábola en su forma canónica con vértice en el origen, eje focal sobre el eje “x” y abre hacia la izquierda.

$y^2 = -4p$

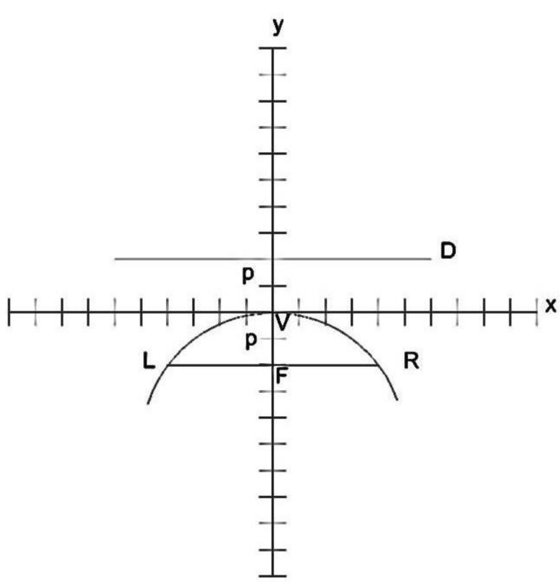


Ecuación de la parábola en su forma canónica con vértice en el origen, eje focal sobre el eje “y” y abre hacia arriba.

$x^2 = 4py$

Ecuación de la parábola en su forma canónica con vértice en el origen, eje focal sobre el eje ”y” y abre hacia abajo.

$x^2 = -4py$



Ejemplos:

1.- Encontrar los elementos de la parábola de ecuación $y^2 = 8x$

$\text{Longitud del lado recto} = 4p = 4 \text{ x } 2 = 8$

$\text{Ecuación de la directriz} \quad x = -2$

$4p = 8$ Coordenadas

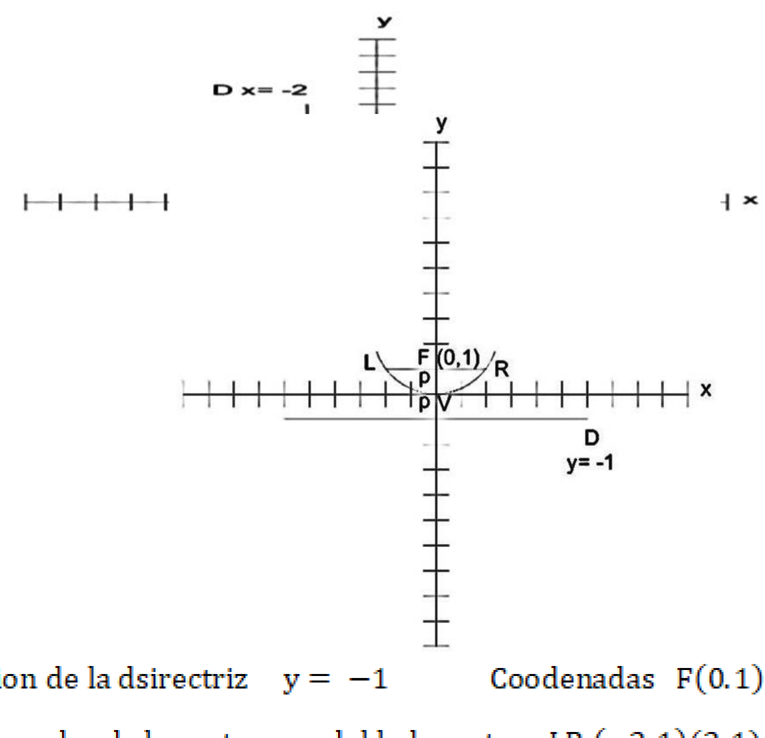
$p = \frac{8}{4}$ $F(2,0)$

$p = 2$ $V(0,0)$

$\text{Coordenadas de los extremos del lado recto} \quad (2,4)\ (2,-4)$

2.- Encontrar las coordenadas del foco, del vértice la de los extremos del lado recto. El lado p y la ecuación de la directriz, de la parábola con ecuación $3x^2 - 12y = 0$, grafica.

$x^2 = 4y \qquad 4p = 4 \text{ por lo tanto } p = 1 \qquad LR = 4$



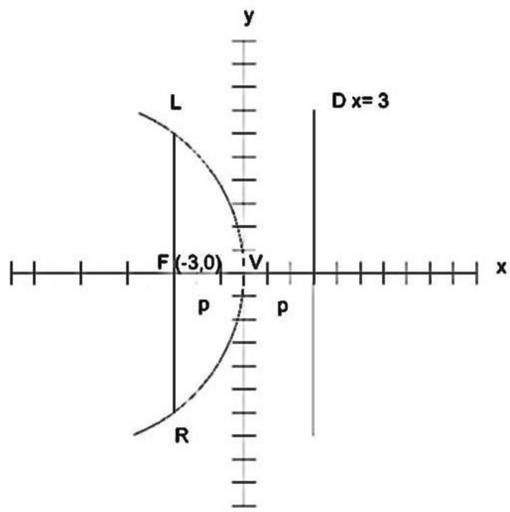
$\text{Ecuacion de la dsirectriz} \quad y = -1 \qquad \text{Coodenadas} \quad F(0.1) \quad V(0,0)$

$\text{coordenadas de los extremos del lado recto} \quad LR\ (-2,1)(2,1)$

3.- Obtener la ecuación de la parábola con vértice en el origen, cuya ecuación de la directriz es $x = 3$, grafica.

coordenadas del foco $F(-3,\ 0)$ del vertice $V(0,0)$ $LR(-3,6)\ (-3,-6)$

longitud del lado recto $= 12$ Ecuación $y^2 = -12x$



4.- Obtener la ecuación de la parábola de vértice en el origen que pasa por el punto $(2,3)$ y su eje coincide con el eje y.

El eje coincide con el eje y, por lo tanto La parábola es vertical, pasa por el punto $(2,3)$, entonces cumple con La ecuación $x^2 = 4py$.

Se sustituye el punto para obtener el valor de p:

$$x^2 = 4px$$

$$(2)^2 = 4p(3)$$

$$4 = 12p$$

$$p = \frac{1}{3}$$

Conociendo el valor de p se determina la ecuación:

$$x^2 = 4px$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{3}\right)y$$

$$x^2 = \frac{4}{3}y \qquad 3x^2 = 4y \quad \textit{Ecuacion de la parabola.}$$

$y^2 = -4x$	$y^2 = 5x$

EJERCICIOS: Determina las coordenadas del foco, del lado recto, la ecuación de la directriz, la ecuación del eje focal y gráfica. De cada una de las siguientes parábolas, con vértice en el origen.

$x^2 = 12y$	$x^2 = -6y$

Encontrar la ecuación de la parábola con vértice en el origen con los datos siguientes:

$Foco\ en\ el\ punto\ (0,6)$	$Foco\ en\ el\ punto\ \ (-5,0)$
$Foco\ en\ el\ punto\ (-\frac{1}{2}, 0)$	$Foco\ en\ el\ punto\ (0,\ \frac{7}{3})$
$Ecuación\ de\ la\ directriz\ \ 2y - 5 = 0$	$Ecuación\ de\ la\ directriz\ \ 2x - 3 = 0$
$Ecuación\ de\ la\ directriz\ \ y + 2 = 0$	$Ecuación\ \ de\ la\ directriz\ \ 2y - 5 = 0$
$Foco\ en\ el\ punto\ \left(\frac{4}{3}, 0\right) y\ diorectriz$ $3x + 4 = 0$	$Foco\ en\ el\ punto\ \left(0,\ \frac{1}{4}\right) y\ directriz$ $4y + 1 = 0$
$Su\ eje\ coincide\ con\ el\ eje\ "x"\ y\ pasa$ $el\ por\ el\ punto\ (-2,0)$	$Su\ eje\ cloincide\ con\ el\ eje\ "y"\ y\ pasa\ porel$ $punto\ (-2,-1)$

Parábola con vértice en (h,k).

Ahora estudiaremos a la parábola con vértice fuera del origen, en cualquier punto (h, k) en el plano y su eje focal es paralelo a uno de los ejes coordenados.

Para deducir las ecuaciones se procede con el tema referente a la traslación de los ejes coordenados, es decir:

Con las ecuaciones de la parábola con vértice en el origen.

$$\mathbf{y^2 = 4px} \qquad\qquad \mathbf{x^2 = 4py}$$

Las ecuaciones están referidas a un sistema $\mathbf{x'}\ \ \mathbf{o'}\ \mathbf{y'}$*; se tiene:*

$$\mathbf{y^2 = 4px'} \qquad\qquad \mathbf{x^2 = 4py'}$$

En el tema de traslación de ejes coordenados se estableció:

$$\mathbf{y' = y - k} \qquad\qquad \mathbf{x' = x - h}$$

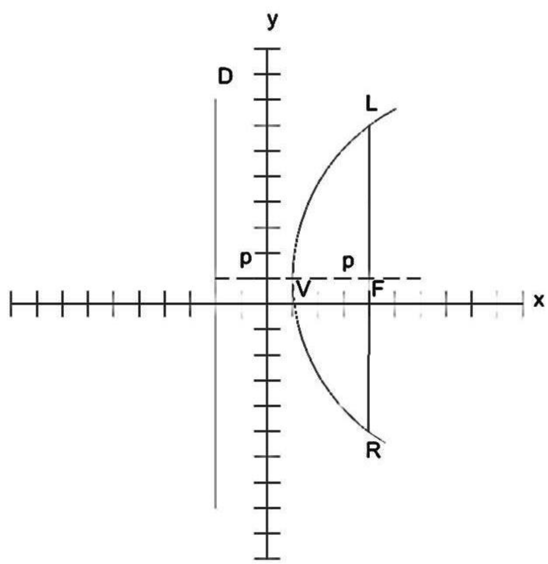
$$\mathbf{(y-k)^2 = 4p(x-h)} \qquad \mathbf{(x-h)^2 = 4p(y-k)}$$

Ecuaciones de la parábola en su forma reducida o en su forma ordinaria.

En donde:

Ecuación de la parábola con vértice en (h, k), abre a la derecha y el eje focal es paralelo al eje x.

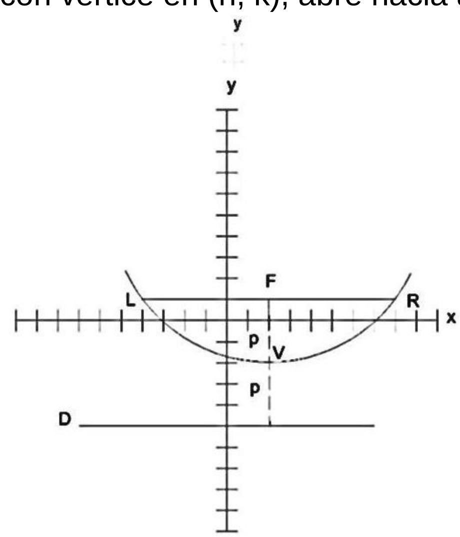
$$\mathbf{(y-k)^2 = 4p(x-h)}$$



Ecuación de la parábola con vértice en (h, k), abre a la izquierda y el eje focal es paralelo al eje x.

$$\mathbf{(y-k)^2 = -4p(x-h)}$$

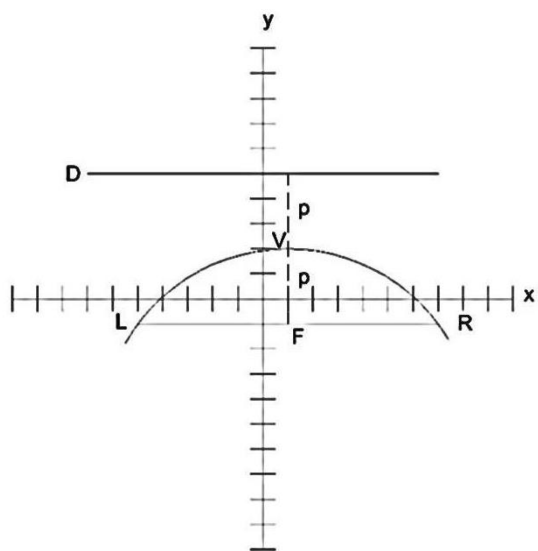
Ecuación de la parábola con vértice en (h, k), abre hacia arriba y el eje focal es paralelo al eje y



$(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2 = 4\mathbf{p}(\mathbf{y}-\mathbf{k})$

Ecuación de la parábola con vértice en (h, k), abre hacia abajo y el eje focal es paralelo al eje y

$$(\mathbf{x}-\mathbf{h})^2 = -4\mathbf{p}(\mathbf{y}-\mathbf{k})$$



EJEMPLOS:

1.- Dada la ecuación de la parábola $(\mathbf{y}-\mathbf{3})^2 = \mathbf{12}(\mathbf{x}+\mathbf{4})$, determina las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de la directriz y traza la gráfica correspondiente.

$k = 3$ $\quad\quad$ *coordenadas del vertice* $\quad V(-4,3)$

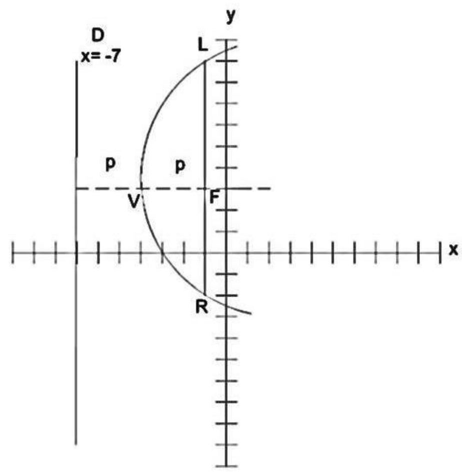
$h = -4$

Como habre a la derecha las cordenadas del foco son $\quad F = (-1,3)$

$4p = 12$

$p = \frac{12}{4}$ $\quad\quad$ *Ecuación de la directriz* $\quad x = -7$

$p = 3$

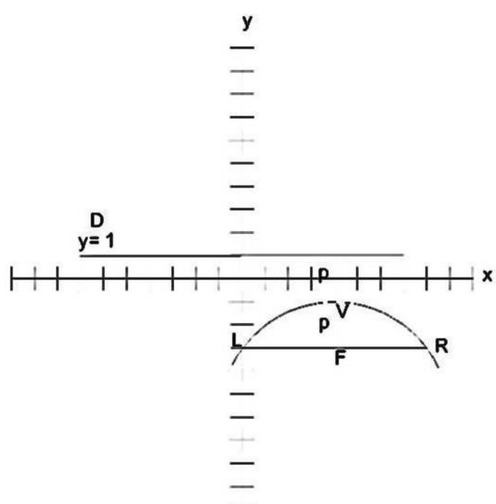


2.- Encontrar la ecuación de la parábola en su forma ordinaria, si la ecuación de la directriz es $\mathbf{y = 1}$ y las coordenadas del foco son: $\mathbf{f(4, -3)}$

Graficando los datos tenemos: $\boldsymbol{Coordenadas\ del\ vertice \quad V(4, -1)}$

$\boldsymbol{p = 2} \qquad \boldsymbol{por\ lo\ que\ \ 4p = 8}$

Por lo tanto la ecuación de la parábola es: $\boldsymbol{(x - 4)^2 = 8(y + 1)}$

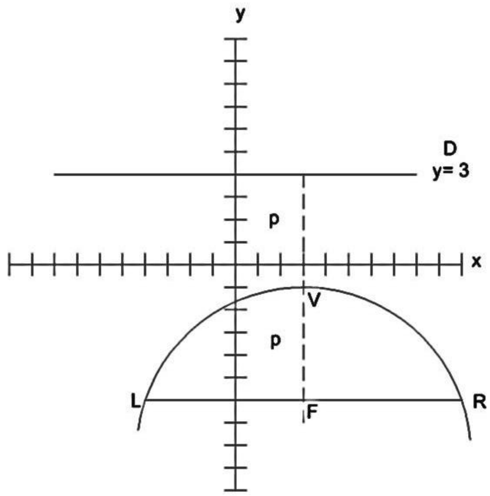


3.- Determina la ecuación de la parábola en su forma reducida, cuyo vértice es $\boldsymbol{V(3, -1)}$ y su foco es $\boldsymbol{F(3, -5)}$, gráfica.

Graficando los datos se obtienen $\boldsymbol{p = 4}$

$\boldsymbol{la\ ecuacion\ de\ la\ directriz\ es\ y = 3}$

La ecuación de la parábola es $\boldsymbol{(x-3)^2 = -16(y+1)}$



EJERCICIOS:

Encontrar la ecuación de la parábola en su forma reducida u ordinaria, con los siguientes datos. Grafica.

$V(-9,7)\ y\ F(-2,7)$	$V(4,-5)\ y\ F(4,9)$
$F(4,10)$ *y ecuación de la directriz* $y = -2$ -	$F(-8,9)$ *y la ecuación de la directriz* $y = 3$
$F(-7,3)$ *y ecuación de la directriz* $y = 8$	$F(9,-7)$ *y la ecuación de la directriz* $x = 4$

$V = (2,-8)$ *y* $F(8,-8)$	$V(4,2)$ *y* $F(-5,2)$
$V(5,-13)$ *y la ecuación de la directriz* $y = 6$	$V(-1,0)$ *y la ecuación de la directriz* $y = 5$

Lado recto $= 16.$ $V(-2,-3)$ *y abre hacia abajo.*	$V(3,2)$ *y coordenadas del lado recto* $(-2,12)$ *y* $(-2,-8)$
$V(-3,5)$, *su lado recto* $= 24$ *y su eje es paralelo al eje "y"*	$F(-8,5)$ *y ecuación de la directriz* $y = 0$
$F(9,-7)$ *y ecuación de la directriz* $y = 4$	$V(9,4)$ *y ecuación de la directriz* $y = -8$

Dada la ecuación de la parábola en su forma reducida obtener las coordenadas del foco y del vértice

$(y-2\ )^2 = 16x$	$(x-3)^2 = 12y$
$(y-2)^2\ =\ -16(x\ -2)$	$(X+2)^2\ =\ -16(y\ +3)$

Ecuación general de la parábola.

La ecuación general de la parábola se obtiene desarrollando las ecuaciones ordinarias o reducidas.

$$(y-k)^2 = 4p(x-h) \qquad\qquad (x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Desarrollando la primera ecuación:

$$(y-k)^2\ = 4p(x-h)$$

$$y^2\ - 2yk +\ k^2 =\ \ 4px - 4ph$$

Agrupando e igualando a cero:

$$y^2 - 4px - 2yk +\ k^2 + 4ph = 0$$

Si sustituimos en la ecuación anterior:

$$D =\ -4p \qquad\qquad E =\ -2k \qquad\qquad F =\ -\ k^2 + 4ph$$

Se obtiene la ecuación general de la Parábola:

$$y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Forma general de La parábola con eje focal horizontal, paralelo al eje de las x

Desarrollando la segunda Ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p(Y-k)$$

$$x^2 - 2xh +\ h^2 = 4py - 4pk$$

Agrupamos e igualando a cero:

$$x^2 - 4py - 2xh +\ h^2 + 4px = 0$$

Si sustituimos en la ecuación anterior:

$$D = -2h \qquad E = -4p \qquad F = h^2 + 4pk$$

Se obtiene la ecuación general de la parábola

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0$$

EJEMPLOS:

1.- Si el vértice es el punto (1, 3) y la directriz $x = -1$, encontrar la ecuación de la parábola en su forma reducida y en su forma general.

$V(1,3) \qquad D \quad x = -1$

$P = 2$

$$(y-3)^2 = 4p(x-1)$$

$$8y-3)^2 = 8(x-1)$$

$$y^2 - 6y + 9 = 8x - 8$$

$$y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$$

2.- Si el vértice es el punto (3, 0) y el foco (3, 3), encontrar la ecuación de la parábola en su forma reducida y en su forma general.

$V\ (3,0) \qquad F\ (3,3)$

$Directriz\ = y = -3 \qquad p = 3$

$$(x-3)^2 = 4p(y-0)$$

$$(x-3)^2 = 12(y-0)$$

$$(x-3)^2 = 12y$$

$$x^2 - 6x + 9 = 12y$$

$x^2 - 6x$ - 12y + 9 = 0

EJERC ICIOS:

Determinar la ecuación de la parábola en su forma general a partir de los siguientes datos:

$V(-4,3)\ y\ F(-1,3)$	$V(0,2)\ y\ F(-1,2)$

$\mathrm{F}(-8,5)\ y\ V(-4,5)$	$\mathrm{F}(9,4) y\ V(9,-2)$
$\mathrm{V}(0,2)\ y\ F(-1,2)$	$\mathrm{V}(3,0)$ y $\mathrm{F}(3,3)$

$\mathrm{F}(4,10)$ *y la ecuación de la directriz*	$\mathrm{V}(-8,9)$ *y la ecuación de la directriz* $y=3$
$\mathrm{F}(-7,3)$ *y la ecuación de la directriz* $y=8$	$\mathrm{V}(5,-13)$ *y la ecuación de la directriz* $y=6$

Lado recto $=16$, abre hacia abajo y $\mathrm{V}(-2,-3)$	$\mathrm{V}(3,2)$ *y las coordenadas de los extremos del lado recto* $(-2,12)$ *y* $(-2,-8)$
$\mathrm{F}(-5,2)$ *y su directriz es* $x=2$	$\mathrm{V}(1,-3)$ *y su directriz es* $y+5=0$

$(\mathrm{x}-4)^2 = -8(y+1)$	$(\mathrm{y}-3)^2 = 12(x+4)$
$(\mathrm{x}-7)^2 = 16(y+8)$	$(\mathrm{y}+5)^2 = -12(x-3)$

EJEMPLOS:

1.- Determina la forma reducida de la parábola, si su forma general es

$$y^2+8x-4y-20=0$$

$y^2+8x-4y-20=0$

$$y^2-4y=-8x+20$$

Completando el cuadrado:

$$y^2-4y+4=-8x+20+4$$

Factorizando:

$$(y - 2)(y - 2) = -8x + 24$$

$$(y - 2)^2 = - 8x + 24$$

$$(y - 2)^2 = -8(x + 3)$$

2.- Determinar la forma reducida de la parábola si su forma general es $x^2 - 6x - 12y + 9 = 0$

$$x^2 - 6x - 12y + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x = 12y - 9$$

Completando el cuadrado

$$x^2 - 6x + 9 = 12y - 9 + 9$$

Factorizando:

$$(x - 3)(x - 3) = 12y - 0$$

$$(x - 3)^2 = 12y$$

EJERCICIOS:

Obtener la ecuación de la parábola en su forma reducida u ordinaria a Partir de la ecuación general:

$y^2 + 12x + 4y - 44 = 0$	$x^2 + 2x + 4y - 7 = 0$
$x^2 + 4x + 16y + 52 = 0$	$2x^2 - 12x + 10y + 13 = 0$
$x^2 - 4y - 8x - 12 = 0$	$y^2 - 3x + 2y + 4 = 0$
$x^2 - 6x - 12y - 3 = 0$	$x^2 - 16x + 12y + 40 = 0$
$y^2 + 6y - 4x + 49 = 0$	$x^2 + 4x - 8y - 20 = 0$

$y^2 + 24x - 24 = 0$	$x^2 - 8x + 16y + 48 = 0$
$y^2 - 16y + 20x + 124 = 0$	$y^2 - 10y + 4x + 1 = 0$
$x^2 + 2x + 4y + 1 = 0$	$y^2 + 6y + 8x + 25 = 0$

$x^2 - 28y - 28 = 0$	$3y^2 + 6y - 4x + 49 = 0$
$3y^2 + 6y - 4x + 15 = 0$	$4x^2 - 12x - 16y + 41 = 0$
$x^2 + 8x - 6y + 28 = 0$	$y^2 - 10y - 12x + 37 = 0$

4. Ejercicios de reforzamiento

Circunferencia

1. Escribir la ecuación de la circunferencia de centro (3, 4) y radio 2.

2. Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia con centro en C (-2,3) y radio 4. Traza la gráfica.

3. Determina la ecuación ordinaria y general de la circunferencia con centro en C (1,-7) y radio 5. Traza la gráfica.

4. Determina la ecuación en forma general de la circunferencia cuyos extremos del diámetro son los puntos: A(-2,6) y B(-4, 2). Traza la gráfica.

5. Determina centro y radio de la circunferencia que tiene por ecuación la expresión:

$$x^2 + y^2 + 6x - 4y - 23 = 0$$

6. Determina centro y radio de la circunferencia que tiene por ecuación la expresión:

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$$

Parábola

I. Determina las ecuaciones de las parábolas con las siguientes características. Traza su gráfica.

a) Directriz x = -3, de foco (3, 0).
b) De foco (-2, 5), de vértice (-2, 2).
c) F (2, 3), directriz: x = 6
d) V (-1, 4), eje focal vertical, y la parábola pasa por el punto (2, 2)
e) V (4, 4), eje focal horizontal, y la parábola pasa por el punto (2, 2)

II. Determinar, en forma ordinaria, las ecuaciones de las siguientes parábolas, indicando el valor del parámetro, las coordenadas del foco y del vértice, además de la ecuación de la directriz. Traza su gráfica.

a) $6y^2 - 12x = 0$
b) $2y^2 = -7x$

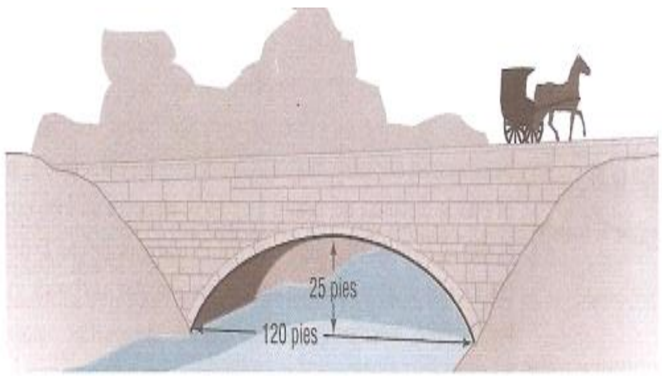
c) $15x^2 = -42y$

III. Calcular las coordenadas del vértice, de los focos, las ecuaciones de las directrices y el lado recto, de las parábolas que tienen las siguientes ecuaciones. Traza su gráfica.

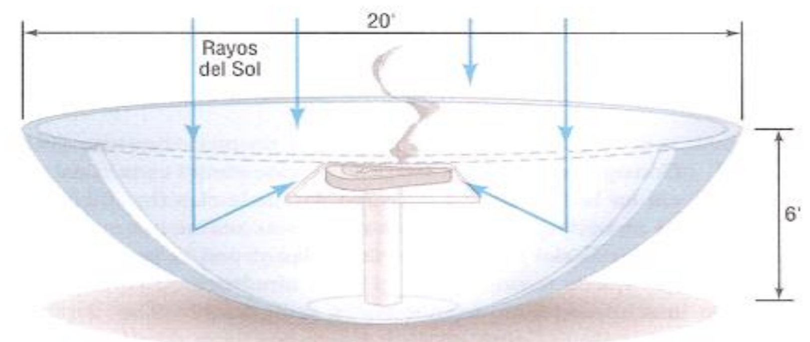
a) $y^2 - 6y - 8x + 17 = 0$
b) $y = x^2 - 6x + 11$
c) $x^2 - 2x - 6y - 5 = 0$

IV. Resuelve los siguientes problemas:

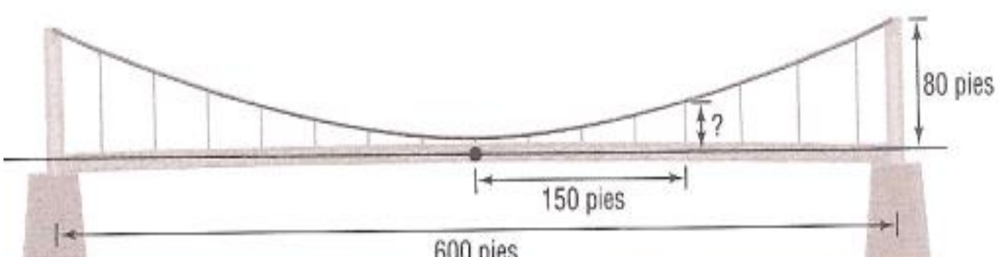
a) PUENTE DE UN ARCO PARABÓLICO. Se construye un puente con forma de arco parabólico. El puente tiene un claro de 120 pies y una altura de 25 pies (ver figura). Elige un sistema coordenado rectangular adecuado y encuentra la altura del arco a las distancias de 10, 30 y 50 pies del centro.



b) CALOR SOL le revolución y se usará para concentrar los rayos del Sol en su foco, creando así una fuente de calor. Si el espejo tiene 20 pies de abertura y 6 pies de profundidad, ¿Dónde se concentrará la fuente de calor?



c) PUENTES COLGANTES. Los cables de un puente en forma parabólica. Las Torres que soportan los cables están separados 600 pies entre sí y tienen 80 pies de altura. Si los cables tocan la superficie de rodamiento a la mitad de la distancia entre las torres. ¿Cuál será la altura del cable en un punto situado a 150 pies de una de las torres?



d) Antena Parabólica. Una antena parabólica tiene la forma de un paraboloide de revolución. Las señales que emanan de un satélite llegan a la superficie de la antena y se reflejan hacia el punto donde se encuentra el receptor. Si la antena tiene 10 pies de diámetro en su abertura y 4 pies de profundidad en su centro, ¿en qué posición debe colocarse el receptor?

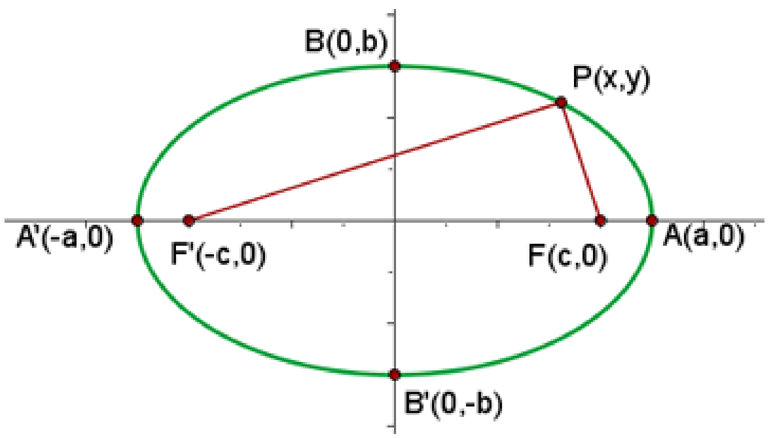
Fuentes de información para el alumno

- Ruiz Basto, J. (2005). Matemáticas III Geometría Analítica. México: Patria. Kramer, A. D. (1993).
- Fundamentos de Matemáticas. México: Mc Graw Hill. Kline, M. (2012). Matemáticas para los estudiantes de humanidades. México: Fondo de Cultura Económica. De Oteyza, E. (1994).
- Geometría Analítica. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

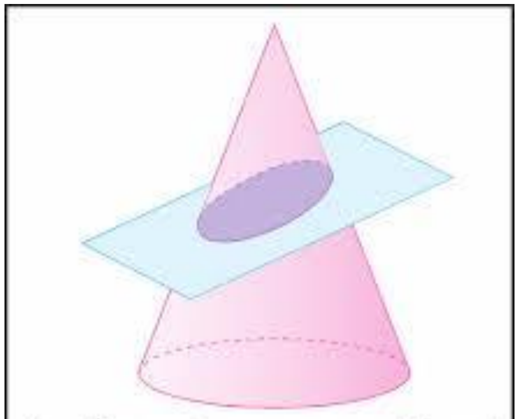
Corte 3. Lugar geométrico: elipse e hipérbola.

ELIPSE

Se define como el lugar geométrico de un punto P(x,y) que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos, situados en el mismo plano y llamados focos, es una cantidad constante y mayor que la distancia entre los focos.



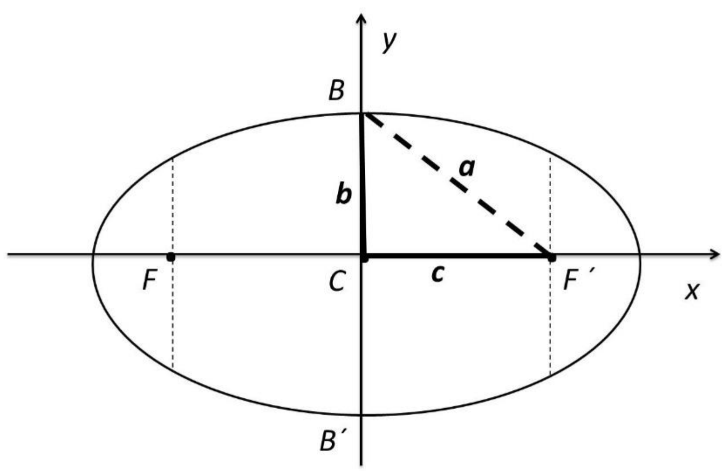
Una elipse es la curva cerrada con dos ejes de simetría que resulta al cortar la superficie de un cono por un plano oblicuo al eje de simetría – con ángulo mayor que el de la generatriz respecto del eje de revolución. Una elipse que gira alrededor de su eje menor genera un esferoide achatado, mientras que una elipse que gira alrededor de su eje principal genera un esferoide alargado. La elipse es también la *imagen afín* de una circunferencia.



La elipse es la curva que se obtiene al cortar un cono por un plano ligeramente inclinado respecto a su eje.

En la gráfica de la elipse, obsérvese que se forma un triángulo rectángulo BFC; en ese triángulo la hipotenusa es a y los catetos b y c. Usando el teorema de Pitágoras tenemos.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



Siendo esta la que origina la ecuación de la elipse, utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$ para despejar y conocer el valor de $c^2 = a^2 + b^2$, entonces tenemos que $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Elementos de la elipse

La elipse está formada por:

- Dos ejes perpendiculares entre sí, uno siempre más grande que el otro; el más grande se le denomina *eje mayor* y su longitud del eje mayor se representa con 2a.
- El otro eje más pequeño se le denomina *eje menor* y su longitud del eje menor se representa con 2b.

- El punto de intersección de sus ejes se denomina *centro* de la elipse $C(x, y)$

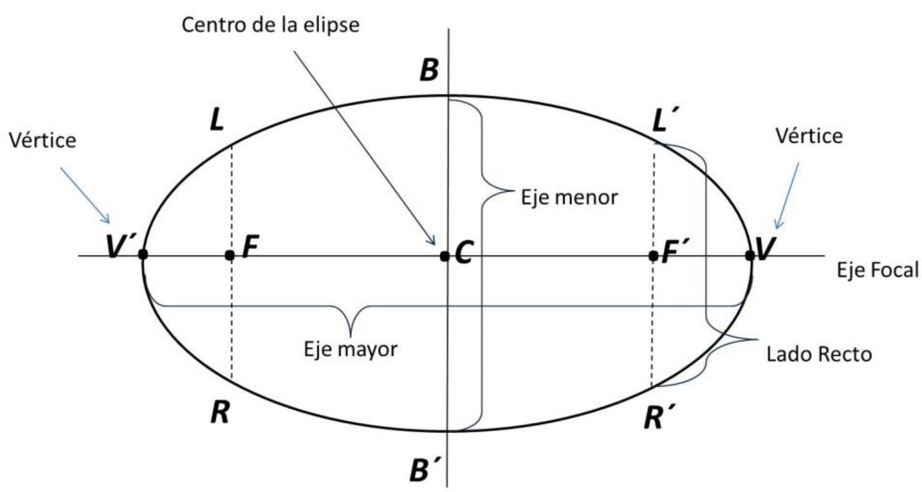
- Los puntos extremos del eje mayor, son los *vértices* de la elipse $V(x, y)$ La elipse tiene dos *lados rectos* LR que son dos rectas que unen dos puntos de la elipse casi al final de sus extremos, la longitud de los lados rectos de la elipse los calculamos como $LR = \frac{2b^2}{a}$ y son perpendiculares al eje mayor la cual pasan por dos puntos llamados *focos.*

- Los *focos* $F(x, y)$ se encuentran ubicados exactamente a la mitad de cada uno de los lados rectos, y su distancia de los focos se representa con 2c.

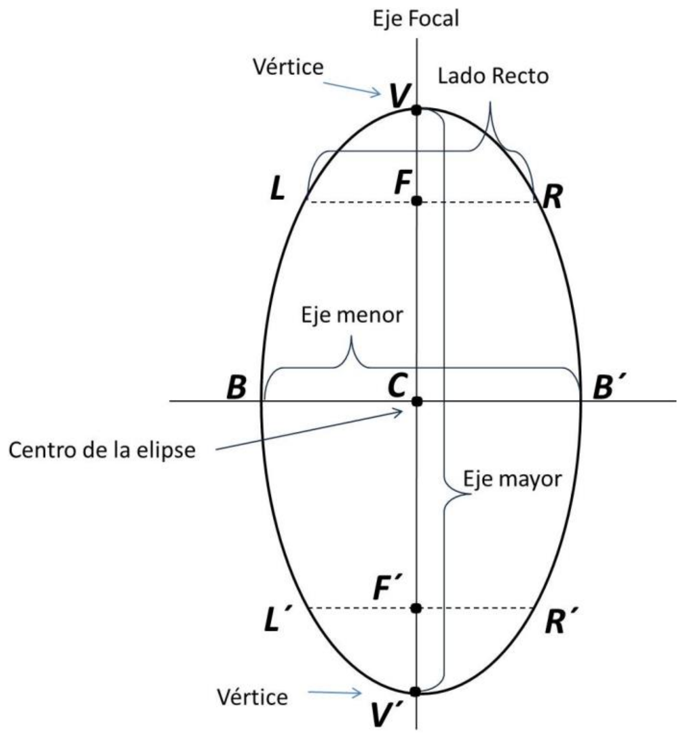
- El eje focal es la recta que pasa por los focos.

- La excentricidad se calcula $e = \frac{c}{a}$ y siempre es menor que 1, pues c < a.

La elipse es una curva simétrica respecto a sus dos ejes y la posición del eje mayor indica la posición de la elipse ya que esta puede estar situada en posición horizontal, o vertical. Veamos las siguientes figuras:



Elipse Horizontal



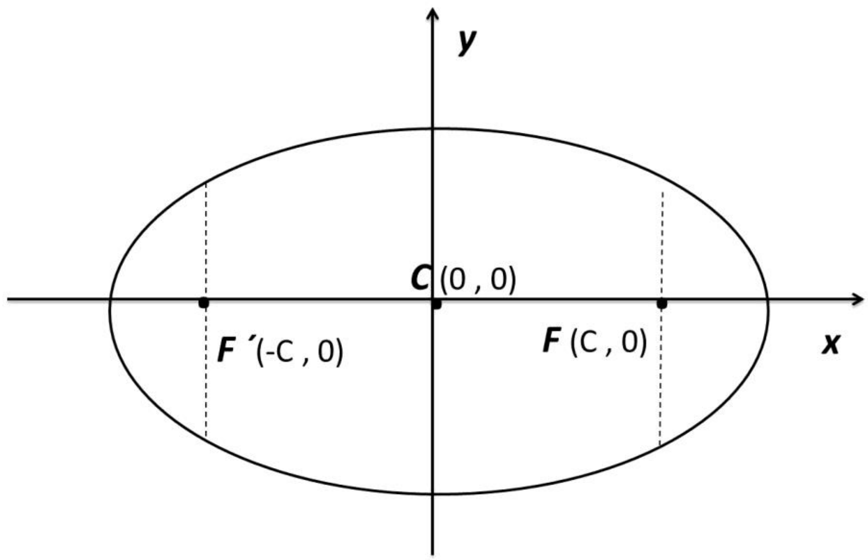
Elipse Vertical

Ecuación general de la Elipse

Toda ecuación de una elipse se puede escribir en la denominada forma general, la cual se representa así; $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ en donde A Y B son diferentes de cero y tienen el mismo signo.

Formas ordinarias de la ecuación de la elipse con centro en el origen.

- Elipse en forma horizontal $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Ejemplo 1. Dada la ecuación de la elipse de forma ordinaria, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$

Hallar:

Centro (x, y)

Eje mayor $\overline{VV´}$ = 2a

Eje menor $\overline{BB´}$ = 2b

V, V´: vértices

F, F´: Focos

Distancia entre foco y foco $\overline{FF´}$ = 2c

LR: Longitud del lado recto

Coordenadas LR, L´R´

Excentricidad $e=\frac{c}{a}$

Forma Ordinaria

Forma General

Gráfica

Análisis de la ecuación

El centro de la elipse es (0, 0), porque es con centro en el origen.

El numero 36 como denominador es mayor que el 9, por lo que 36 es **a^2** por ser este el eje mayor, y 9 es **b^2** por ser este el eje menor.

Por lo que:

a^2 = 36 por lo que al sacar la raíz a = 6 **b^2** = 9 por lo que al sacar la raíz b = 3

Entonces: Eje mayor = **2a** = 12 Eje menor = **2b** = 6

Vértices (-6,0) y (6,0)

Utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejamos $c^2 = a^2 + b^2$

y tenemos que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Entonces al sustituir:

$c = \sqrt{36-9}$ $c = \sqrt{27}$ $c = 5.19$

Focos: (-5.19, 0) Y (5.19, 0)

Distancia entre foco y foco = 2c = 10.38

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$ $LR = \frac{2(9)}{6}$ $LR = \frac{18}{6}$ $LR = 3$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$ $e = \frac{5.19}{6}$ $e = 0.865$

Conversión de forma ordinaria a forma general

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$324\left[\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9}\right] = (1) \quad 324$$

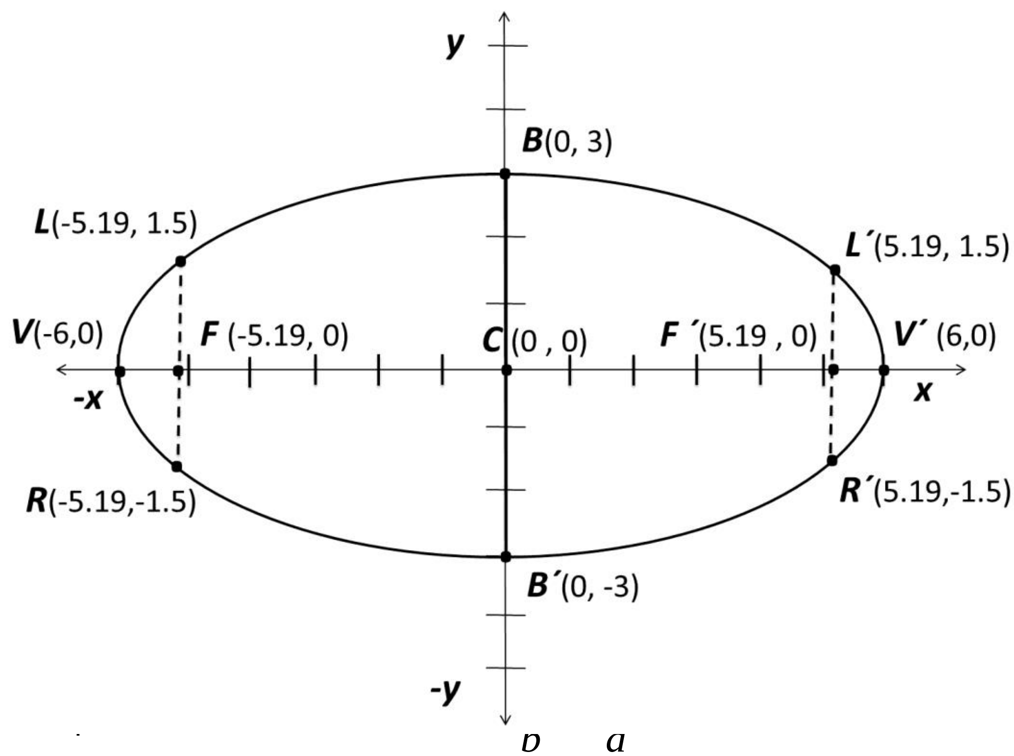
$$\left[\frac{324x^2}{36} + \frac{324y^2}{9}\right] = 324$$

$$9x^2 + 36y^2 = 324$$

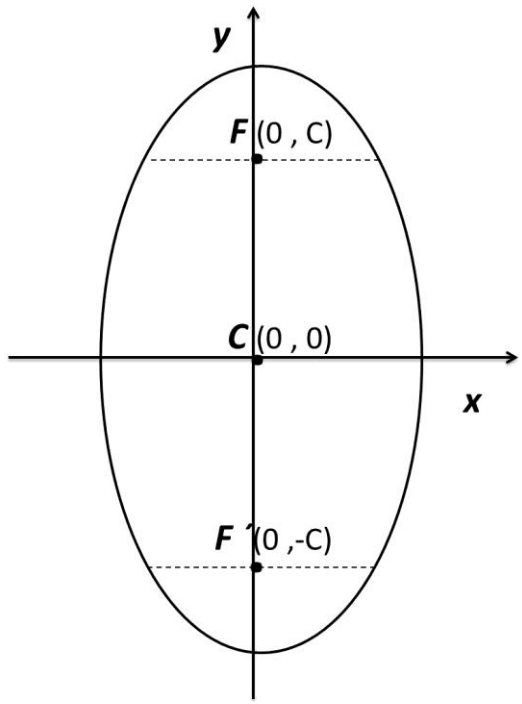
$$9x^2 + 36y^2 - 324 = 324 - 324$$

$$9x^2 + 36y^2 - 324 = 0$$

Gráfica



- **Elipse en forma vertical** $$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



Ejercicio 2. Dada la ecuación de la elipse de forma ordinaria $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

Hallar:

Centro (x, y)

Eje mayor $\overline{VV´}$ = 2a

Eje menor $\overline{BB´}$ = 2b

V, V´: vértices

F, F´: Focos

Distancia entre foco y foco $\overline{FF´}$ = 2c

LR: Longitud del lado recto

Coordenadas LR, L´R´

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

Forma Ordinaria

Forma General

Gráfica

Análisis de la ecuación

El centro de la elipse es (0, 0), porque es con centro en el origen.

El numero 25 como denominador es mayor que el 9, por lo que 25 es **a²** por ser este el eje mayor, y 9 es **b²** por ser este el eje menor.

Por lo que:

a² = 25 por lo que al sacar la raíz a = 5

b² = 9 por lo que al sacar la raíz b = 3

Entonces: Eje mayor = **2a** = 10

Eje menor = **2b** = 6

Vértices (0,5) y (0,-5)

Utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejamos $c^2 = a^2 + b^2$

y tenemos que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Entonces al sustituir:

$c = \sqrt{25 - 9}$ $\quad c = \sqrt{16}$ $\quad c = 4$

Focos: (0,4) Y (0, -4)

Distancia entre foco y foco = 2c = 8

Lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$ $\quad LR = \dfrac{2(9)}{5}$ $\quad LR = \dfrac{18}{5}$ $\quad LR = 3.6$

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$ $\quad e = \dfrac{4}{5}$ $\quad e = 0.8$

Conversión de forma ordinaria a forma general

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$225\left[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}\right] = (1) \quad 225$$

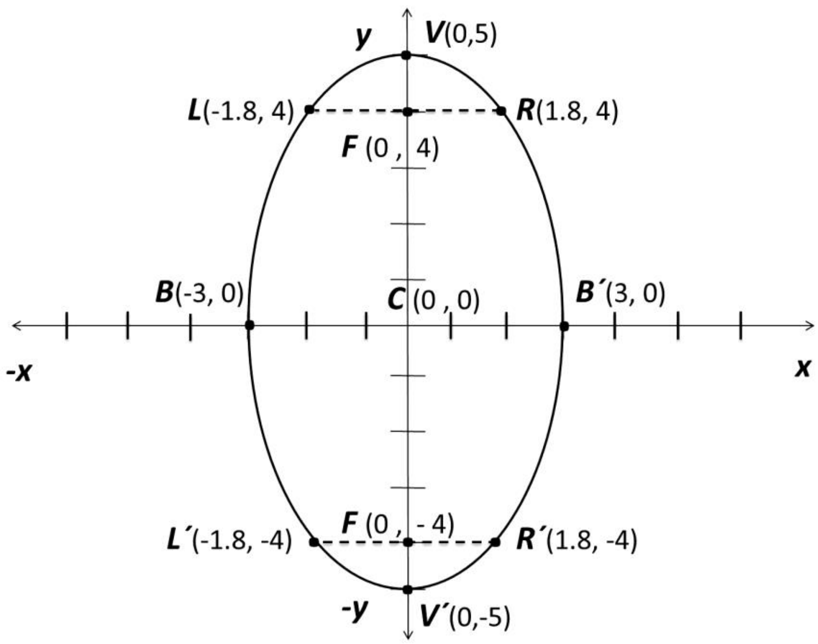
$$\left[\frac{225x^2}{9}+\frac{225y^2}{25}\right]=225$$

$$25x^2+9y^2=225$$

$$25x^2+9y^2-225=225-225$$

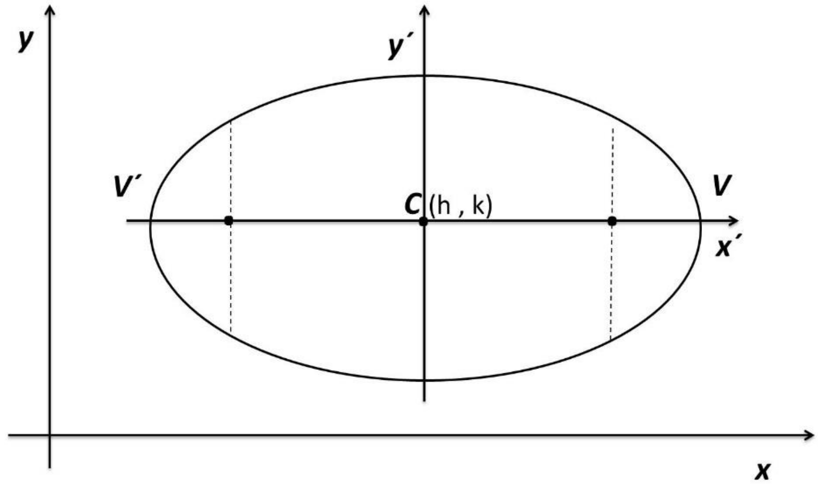
$$25x^2+9y^2-225=0$$ Ecuación general

Gráfica



ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON EL CENTRO FUERA DEL ORIGEN

- Elipse en forma horizontal $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$



Ejercicio 3. Dada la forma ordinaria de la elipse, $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+6)^2}{9}=1$

Hallar:

Centro (x, y)

Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a

Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b

V, V´: vértices

F, F´: Focos

Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c

LR: Longitud del lado recto

Coordenadas LR, L´R´

Excentricidad $e=\frac{c}{a}$

Forma General

Gráfica

Análisis de la ecuación

El centro de la elipse es (4, -6), porque no tomamos en cuenta los signos negativos de la formula, es decir; el cuatro es positivo porque el signo negativo después de la *x* es de la formula y por eso nos da cuatro. E igual el signo (+) después de la *y* es negativo por la formula, de tal modo que al tener el signo (-) del seis y al ser multiplicado por este signo (-) de la formula nos queda expresado como más seis, o sea (y+6).

El numero 25 como denominador es mayor que el 9, por lo que 25 es **a²** por ser este el eje mayor, y 9 es **b²** por ser este el eje menor.

Por lo que:

a^2 = 25, por lo que al sacar la raíz a = 5 **b^2** = 9, por lo que al sacar la raíz b = 3

Entonces: Eje mayor = **2a** = 10 Eje menor = **2b** = 6

Vértices (-1,-6) y (9,-6)

Utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejamos $c^2 = a^2 + b^2$

y tenemos que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Entonces al sustituir:

$c = \sqrt{25-9}$ $c = \sqrt{16}$ $c = 4$

Focos: (0,-6) Y (8, -6)

Distancia entre foco y foco = 2c =8

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$ $LR = \frac{2(9)}{5}$ $LR = \frac{18}{5}$ $LR = 3.6$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$ $e = \frac{4}{5}$ $e = 0.8$

Conversión de forma ordinaria a forma general

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$$

$$\frac{9(x-4)^2 + 25(y+6)^2}{225} = 1$$

$$225\left[\frac{9(x-4)^2 + 25(y+6)^2}{225}\right] = [1] \quad 225$$

$$9(x-4)^2 + 25(y+6)^2 = 225$$

$$9(x^2 - 8x + 16) + 25(y^2 + 12y + 36) = 225$$

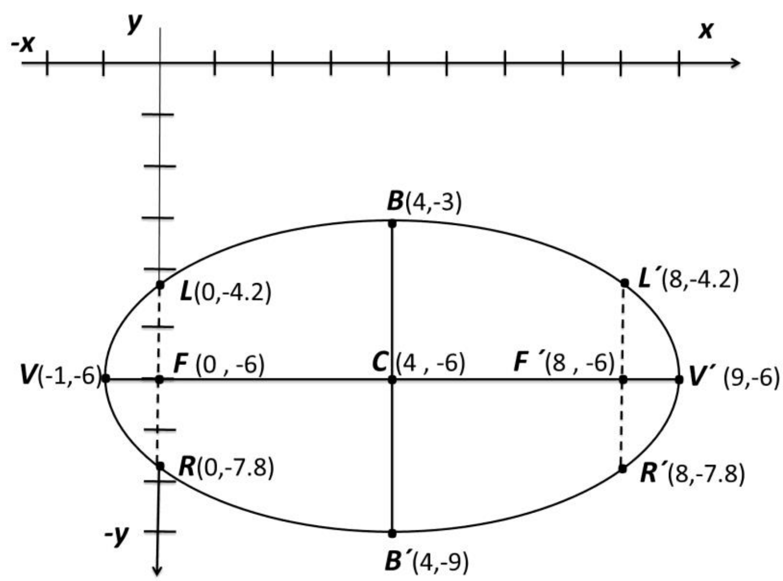
$$9x^2 - 72x + 144 + 25y^2 + 300y + 900 = 225$$

$$9x^2 - 72x + 25y^2 + 300y + 1044 - 225 = 0$$

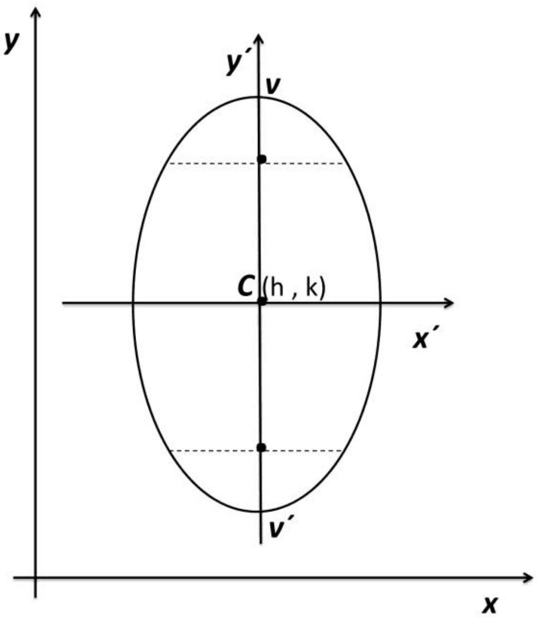
$$9x^2 - 72 + 25y^2 + 300y + 819 = 0$$

$9x^2 + 25y^2 - 72x + 300y + 819 = 0$ Ecuación general

Gráfica



- **Elipse en forma vertical** $$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Ejemplo 4. Dada la ecuación de la elipse en su forma ordinaria, $\frac{(x+5)^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{16}=1$

Hallar:

Centro (x, y)

Eje mayor $\overline{VV´}$ = 2a

Eje menor $\overline{BB´}$ = 2b

V, V´: vértices

F, F´: Focos

Distancia entre foco y foco $\overline{FF´}$ = 2c

LR: Longitud del lado recto

Coordenadas LR, L´R´

Excentricidad $e=\frac{c}{a}$

Forma General

Gráfica

Análisis de la ecuación

El centro de la elipse es (-5, 3), porque no tomamos en cuenta los signos negativos de la formula, es decir; el tres es positivo porque el signo negativo después de la ***y*** es de la formula y por eso nos da tres. E igual el signo (+) después de la ***x*** es negativo por la formula, de tal modo que al tener el signo (-) del cinco y al ser multiplicado por este signo (-) de la formula nos queda expresado como más cinco, o sea (x+5).

El numero 16 como denominador es mayor que el 4, por lo que 16 es $\mathbf{a^2}$ por ser este el eje mayor, y 4 es $\mathbf{b^2}$ por ser este el eje menor.

Por lo que:

$\mathbf{a^2}$ = 16, por lo que al sacar la raíz a = 4 $\mathbf{b^2}$ = 4, por lo que al sacar la raíz b = 2

Entonces: Eje mayor = **2a** = 8 Eje menor = **2b** = 4

Vértices (-5,7) y (-5,-1)

Utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejamos $c^2 = a^2 + b^2$

y tenemos que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Entonces al sustituir:

$c = \sqrt{16-4}$ $c = \sqrt{12}$ $c = 3.46$

Focos: (-5,6.46) Y (-5, -0.46)

Distancia entre foco y foco = 2c = 6.92

Lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$ $LR = \dfrac{2(4)}{4}$ $LR = \dfrac{8}{4}$ $LR = 2$

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$ $e = \dfrac{3.46}{4}$ $e = 0.865$

Conversión de forma ordinaria a forma general

$$\frac{(x+5)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

$$\frac{16(x+5)^2+4(y-3)^2}{64}=1$$

$$64\left[\frac{16(x+5)^2+4(y-3)^2}{64}\right]=[1]\quad 64$$

$$16(x+5)^2+4(y-3)^2=64$$

$$16\left(x^2+10x+25\right)+4\left(y^2-6y+9\right)=64$$

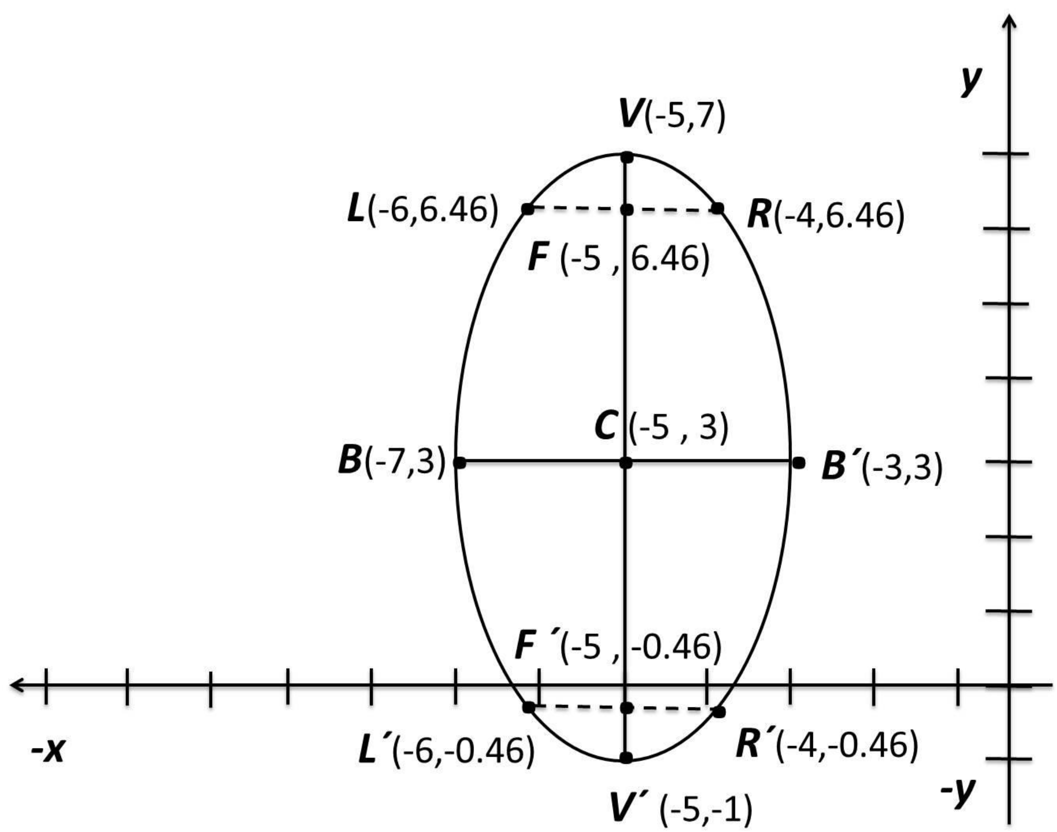
$$16x^2+160x+400+4y^2-24y+36=64$$

$$16x^2+160x+4y^2-24y+436-64=0$$

$$16x^2+160x+4y^2-24y+372=0$$

$$16x^2+4y^2+160x-24y+372=0$$ Ecuación general

Gráfica



CONVERSIÓN DE FORMA GENERAL A FORMA ORDINARIA EN EL ORIGEN

A partir de la ecuación general de una elipse podemos determinar la expresión de su forma reducida a través del método de completar trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplo 5. Dada la ecuación de la elipse en su forma general: $16x^2 + y^2 - 16 = 0$

Obtener su forma ordinaria para poder encontrar todos sus elementos.

$$16x^2 + y^2 - 16 = 0$$

$$16x^2 + y^2 - 16 + 16 = 0 + 16$$

$$16x^2 + y^2 = 16$$

$$\frac{16}{16}x^2 + \frac{y^2}{16} = \frac{16}{16}$$

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$$

De su forma ordinaria, $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$ ahora encontramos:

Centro (x, y)

Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a

Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b

V, V´: vértices

F, F´: Focos

Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c

LR: Longitud del lado recto

Coordenadas LR, L´R´

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

Gráfica

Análisis de la ecuación

El centro de la elipse es (0, 0), porque la fórmula es con centro en el origen.

El numero 16 como denominador es mayor que el 1, por lo que 16 es $\mathbf{a^2}$ por ser este el eje mayor, y 1 es $\mathbf{b^2}$ por ser este el eje menor.

Por lo que:

$\mathbf{a^2}$ = 16 por lo que al sacar la raíz a = 4 $\mathbf{b^2}$ = 1 por lo que al sacar la raíz b = 1

Entonces: Eje mayor = **2a** = 8 Eje menor = **2b** = 1

Vértices (0,4) y (0,-4)

Utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejamos $c^2 = a^2 + b^2$

y tenemos que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Entonces al sustituir:

$c = \sqrt{16-1}$ $c = \sqrt{15}$ $c = 3.87$

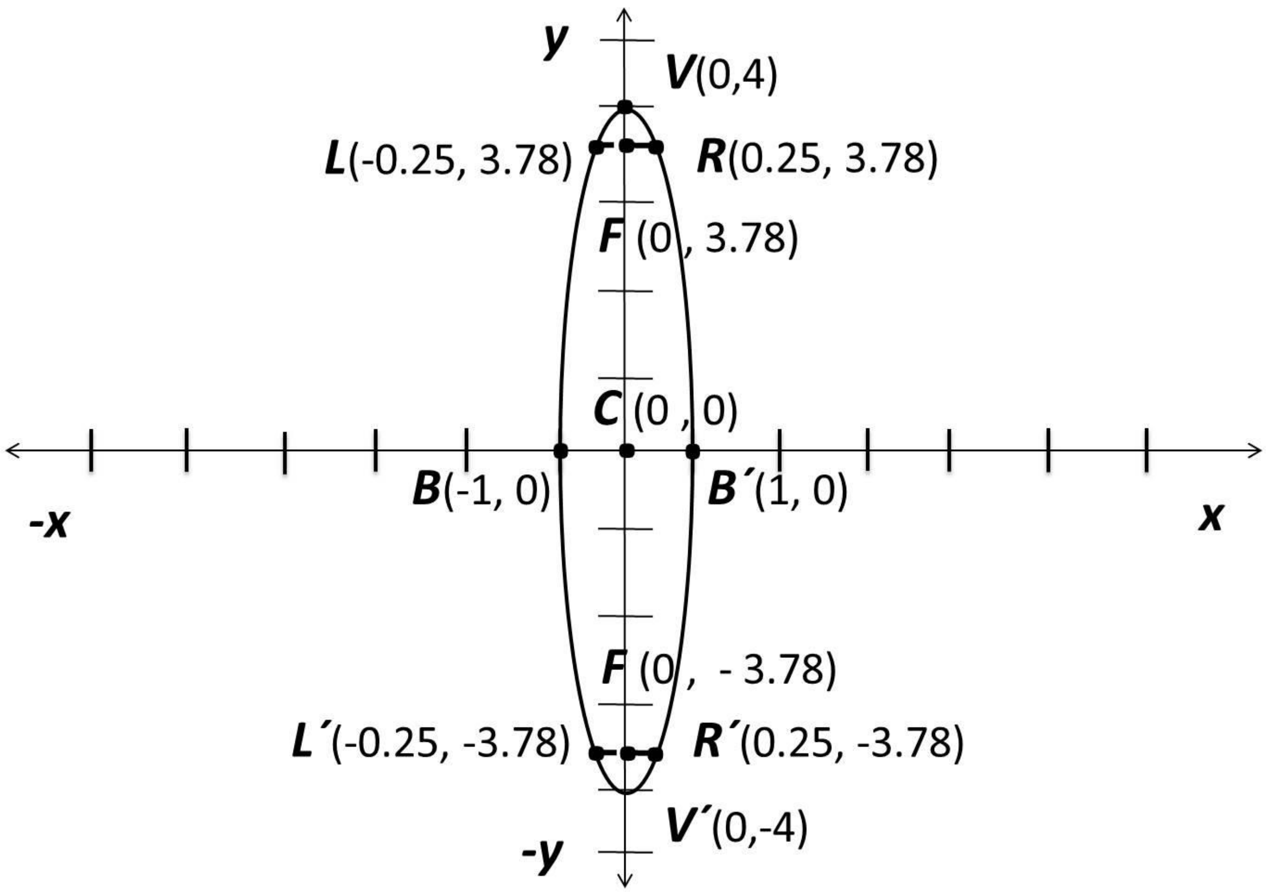
Focos: (0,3.87) Y (0, -3.87)

Distancia entre foco y foco = 2c = 7.74

Lado recto: $LR = \dfrac{2b^2}{a}$ $LR = \dfrac{2(1)}{4}$ $LR = \dfrac{2}{4}$ $LR = 0.5$

Excentricidad $e = \dfrac{c}{a}$ $e = \dfrac{3.87}{4}$ $e = 0.96$

Gráfica



CONVERSIÓN DE FORMA GENERAL A FORMA ORDINARIA FUERA DEL ORIGEN

Ahora veamos la conversión de forma general de la elipse a forma ordinaria de la elipse para poder encontrar todos sus elementos.

Ejemplo 6. Dada la ecuación de la elipse en su forma general: $4x^2 + 49y^2 - 8x - 294y + 249 = 0$

Obtener su forma ordinaria:

$$4x^2 + 49y^2 - 8x - 294y + 249 = 0$$

$4x^2 - 8x + ?$ $\qquad 49y^2 - 294y + ?$ $\qquad = -249$

$a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad a^2 + 2ab + b^2$

$Si: \quad a^2 = 4x^2$

$Entonces: \quad a = 2x$

$2(ab) = -8x$

$2(2x)b = -8x$

$4xb = -8x$

$b = \dfrac{-8x}{4x}$

$b = -2$

$b^2 = 4$

$Si: \quad a^2 = 49y^2$

$Entonces: \quad a = 7y$

$2ab = -294y$

$2(7y)b = -294y$

$14yb = -294y$

$b = \dfrac{-294y}{14y}$

$b = -21$

$b^2 = 441$

Entonces:

$4x^2 - 8x + 4$

$(a+b)^2$

$(2x-2)^2$

$[2(x-1)]^2$

$2^2(x-1)^2$

$2^2(x-1)^2$

$\dfrac{4(x-1)^2}{196}$

$49y^2 - 294y + 441 \qquad = -249 + 4 + 441$

$(a+b)^2$

$(7y-21)^2 \qquad = 196$

$[7(y-3)]^2 \qquad = 196$

$7^2(y-3)^2 \qquad = 196$

$7^2(y-3)^2 \qquad = 196$

$\dfrac{49(y-3)^2}{196} \qquad = 196$

Por lo tanto, obtenemos:

$$\frac{(x-1)^2}{49} + \frac{(y-3)^2}{4} = 196$$

De su forma ordinaria, $\dfrac{(x+1)^2}{49} + \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$ ahora encontramos:

Centro (x, y)

Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a

Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b

V, V´: vértices

F, F´: Focos

Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c

LR: Longitud del lado recto

Coordenadas LR, L´R´

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$

Gráfica

Análisis de la ecuación

El centro de la elipse es (1, 3), El numero 49 como denominador es mayor que el 4, por lo que 49 es $\mathbf{a^2}$ por ser este el eje mayor, y 4 es $\mathbf{b^2}$ por ser este el eje menor.

Por lo que:

$\mathbf{a^2}$ = 49, por lo que al sacar la raíz a = 7 $\mathbf{b^2}$ = 4, por lo que al sacar la raíz b = 2

Entonces: Eje mayor = **2a** = 14 Eje menor = **2b** = 4

Vértices (-6,3) y (8,3)

Utilizamos la fórmula: $a^2 = b^2 + c^2$

Despejamos $c^2 = a^2 + b^2$

y tenemos que: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Entonces al sustituir:

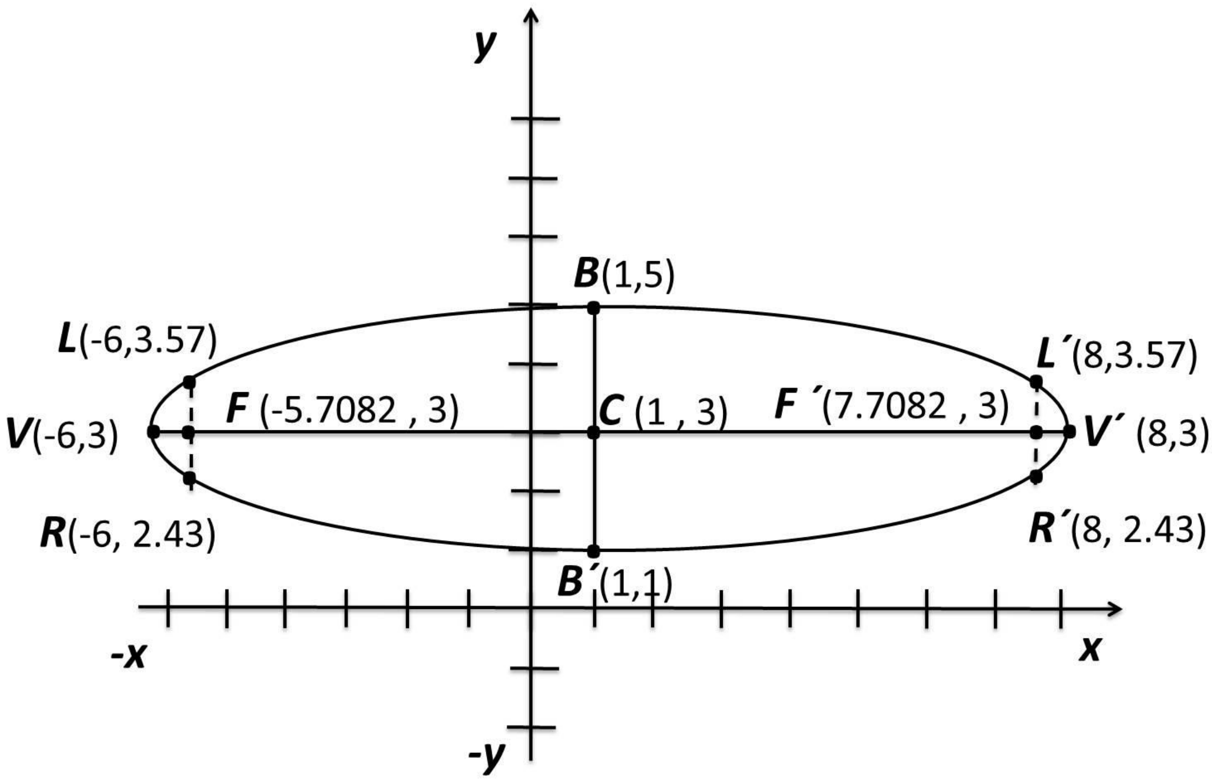
$c = \sqrt{49 - 4}$ $c = \sqrt{45}$ $c = 6.7082$

Focos: (-5.7082, 3) y (7.7082, 3)

Distancia entre foco y foco = 2c = 13.41

Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$ $LR = \frac{2(4)}{7}$ $LR = \frac{8}{7}$ $LR = 1.14$

Excentricidad $e = \frac{c}{a}$ $e = \frac{6.7082}{7}$ $e = 0.95$



Ejercicios

1.- Hallar su forma ordinaria y general de la elipse con vértices V(-6,-1) y V´(4, -1) y $e = \frac{4}{5}$,

a) Centro (h, k)	b) Eje mayor $\overline{VV´}$ = 2a
c) Eje menor $\overline{BB´}$ = 2b	d) F, F´: Focos
e) Distancia entre foco y foco $\overline{FF´}$ = 2c	d) LR: Longitud del lado recto
e) Coordenadas LR, L´R´	f) Forma General

g) Grafica

2.- Hallar su forma ordinaria y general de la elipse con vértices V(0,10) y V´(0, -10) y $e=\frac{6}{10}$,

a) Centro (h, k)	b) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a
c) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b	d) F, F´: Focos
e) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	f) LR: Longitud del lado recto
g) Coordenadas LR, L´R´	h) forma general
i) grafica	

3.-Dada la ecuación de la elipse en su forma ordinaria $\frac{(x+3)^2}{64}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$ Encontrar:

a) Centro (x, y)	b) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a
c) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b	d) V, V´: vértices
e) F, F´: Focos	f) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c
g) LR: Longitud del lado recto	h) Coordenadas LR, L´R´
i) Excentricidad $e=\frac{c}{a}$	j) Forma General
k) Grafica	

4.- Dada la ecuación de la elipse en su forma ordinaria $\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{(y+1)^2}{81}=1$ Encontrar:

a) Centro (h, k)	b) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a
c) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b	d) V, V´: vértices
e) F, F´: Focos	f) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c
g) LR: Longitud del lado recto	h) Excentricidad $e=\frac{c}{a}$
i) Forma General	j) Grafica

5.- Hallar su forma ordinaria y general de la elipse con focos F(-5,1) y F´(3, 1) y $LR=\frac{18}{5}$,

a) Centro (x, y)	b) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a
c) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b	d) V, V´: vértices
e) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	f) LR: Longitud del lado recto
g) Coordenadas LR, L´R´	h) Excentricidad $e=\frac{c}{a}$
i) Grafica	

6. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $4x^2+9y^2-16x+18y-11=0$

a) Forma Ordinaria	b) Centro (h, k)
c) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a	d) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b
e) V, V´: vértices	f) F, F´: Focos
g) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	h) LR: Longitud del lado recto

i) Coordenadas LR, L´R´	j) Excentricidad $e=\frac{c}{a}$
k) Grafica	

7. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $x^2+25y^2-25=0$, encuentra:

a) Forma Ordinaria	b) Centro (h, k)
c) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a	d) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b
e) V, V´: vértices	f) F, F´: Focos
g) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	h) LR: Longitud del lado recto
i) Coordenadas LR, L´R´	j) Excentricidad $e=\frac{c}{a}$
k) Grafica	

8. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $9x^2+4y^2-36=0$, encuentra:

a) Forma Ordinaria	b) Centro (h, k)
c) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a	d) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b
e) V, V´: vértices	f) F, F´: Focos
g) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	h) LR: Longitud del lado recto
i) Coordenadas LR, L´R´	j) Excentricidad $e=\frac{c}{a}$
k) Grafica	

9. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $x^2 + 25y^2 - 25 = 0$

a) Forma Ordinaria	b) Centro (h, k)
c) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a	d) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b
e) V, V´: vértices	f) F, F´: Focos
g) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	h) LR: Longitud del lado recto
i) Coordenadas LR, L´R´	j) Excentricidad $e = \frac{c}{a}$
k) Grafica	

10. Dada la ecuación de la elipse en su forma general $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$ Encontrar:

a) Forma Ordinaria	b) Centro (h, k)
c) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a	d) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b
e) V, V´: vértices	f) F, F´: Focos
g) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	h) LR: Longitud del lado recto
i) Coordenadas LR, L´R´	j) Excentricidad $e = \frac{c}{a}$
k) Grafica	

11. Dados los elementos de la elipse con centro C (2,2), eje mayor 10 vertical y eje menor 2 horizontal.

a) V, V´: vértices	b) F, F´: Focos
c) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	d) LR: Longitud del lado recto
e) Excentricidad $e = \frac{c}{a}$	f) Forma Ordinaria
g) Forma General	h) Grafica

12. Dados los elementos de la elipse con centro C (3,-2), eje mayor 8 vertical y eje menor 3 horizontal.

a) V, V´: vértices	b) F, F´: Focos
c) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	d) LR: Longitud del lado recto
e) Coordenadas LR, L´R´	f) Excentricidad $e = \frac{c}{a}$
g) Forma Ordinaria	h) Forma General
i) Grafica	

13. Dados los elementos de la elipse con centro C (-2,1), b= 3 y F (4,3).

a) V, V´: vértices	b) F´: Foco
c) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	d) LR: Longitud del lado recto
e) Coordenadas LR, L´R´	f) Excentricidad $e = \frac{c}{a}$
g) Forma Ordinaria	h) Forma General

i) Grafica

14. Hallar su forma ordinaria y general de la elipse con focos F(-1,4) y F´(-1, -2) y $LR = \frac{3}{6}$,

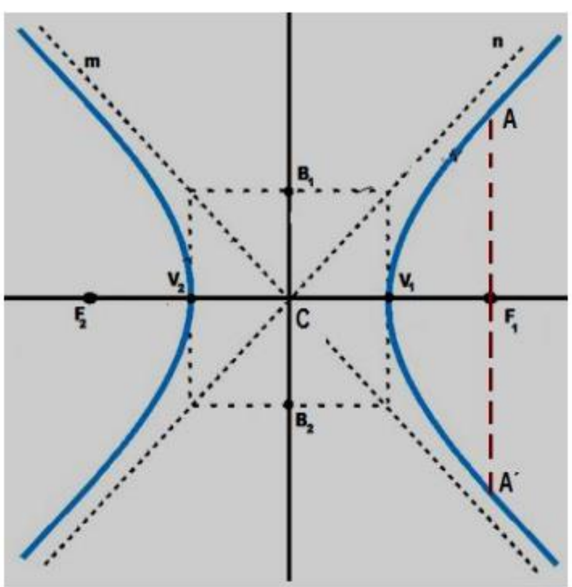
a) Centro (h, k)	b) Eje mayor $\overline{VV'}$ = 2a
c) Eje menor $\overline{BB'}$ = 2b	d) V, V´: vértices
e) Distancia entre foco y foco $\overline{FF'}$ = 2c	f) LR: Longitud del lado recto
g) Coordenadas LR, L´R´	h) Excentricidad $e = \frac{c}{a}$
a) Grafica	

La Hipérbola

Es el lugar geométrico que describe un punto del plano que se mueve de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos, es siempre constante.

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

Gráfica. **Elementos.**



C: Centro.

V_1 y V_2 : Vértices.

F_1 y F_2 : Focos.

B_1 y B_2: Extremos del eje conjugado.

$\overline{V_1V_2} = 2a$ Eje transverso o real

$\overline{F_1F_2} = 2c$ Eje focal.

$\overline{B_1B_2} = 2b$ Eje conjugado o imaginario.

Condición: $c^2 = a^2 + b^2 ; c > b, c > a$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$

$$\overline{AA'} = \overline{LR} = \frac{2b^2}{a} \quad \text{Lado recto.}$$

m y n: Asíntotas.

Ejemplos:

1.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano, cuya diferencia de sus distancias a los puntos fijos *(5,0) y (-5,0)*, es siempre igual a 8 unidades.

Solución:

Se obtienen las distancias del punto *P(x,y)* a los puntos fijos (focos).

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x-5)^2 + y^2} \;\; y \;\; \overline{PF_2} = \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Se aplica la definición de hipérbola.

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 8$$

Se despeja un radical.

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = 8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

Se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado.

$$\left(\sqrt{(x-5)^2 + y^2}\right)^2 = \left(8 + \sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2$$

Se cancela la raíz cuadrada con la potencia 2 del lado izquierdo y se desarrolla el binomio del lado derecho.

$$(x-5)^2 + y^2 = 64 + 16\sqrt{(x+5)^2 + y^2} + (x+5)^2 + y^2$$

$$-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 5x + 16$$

Se elevan ambos miembros de la ecuación al cuadrado.

$$\left(-4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}\right)^2 = (5x+16)^2$$

Se desarrollan los productos.

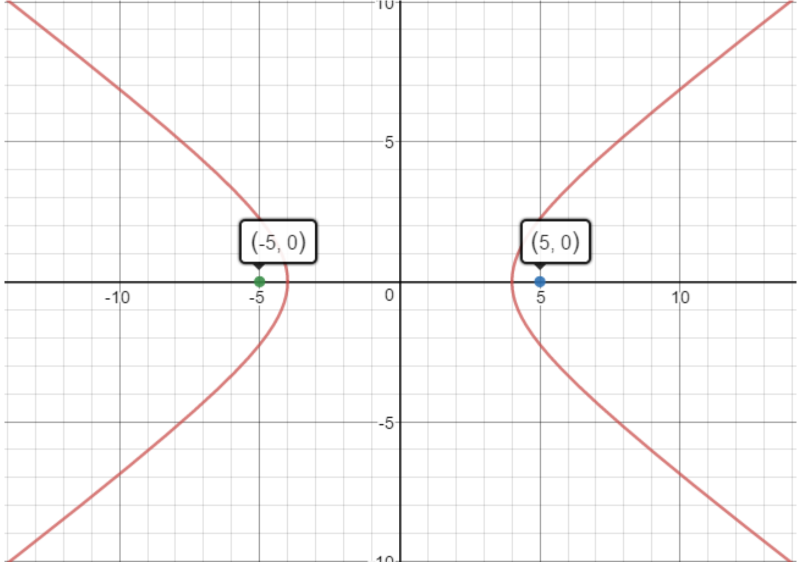
$$16(x^2 + y^2 + 10x + 25) = 25x^2 + 160x + 256$$

Finalmente se simplifica y se obtiene la ecuación de la hipérbola.

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$$

La representación gráfica es la siguiente.

$$9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$$



2.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos fijos (-2,2) y (4,2), es igual a 4.

Solución:

Se aplica un procedimiento similar al ejercicio anterior.

Se aplica la definición y se obtiene:

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} \;\; y \;\; \overline{PF_2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 4$$

Se despeja un radical y se elevan ambos miembros de la igualdad al cuadrado.

$$\left(\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2}\right)^2 = \left(4 + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}\right)^2$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 16 + 8\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} + (x-4)^2 + (y-2)^2$$

Se continúa con el desarrollo.

$$x^2 + 4x + 4 = 16 + 8\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} + x^2 - 8x + 16$$

$$12x - 28 = 8\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

Todo entre 4.

$$3x - 7 = 2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}$$

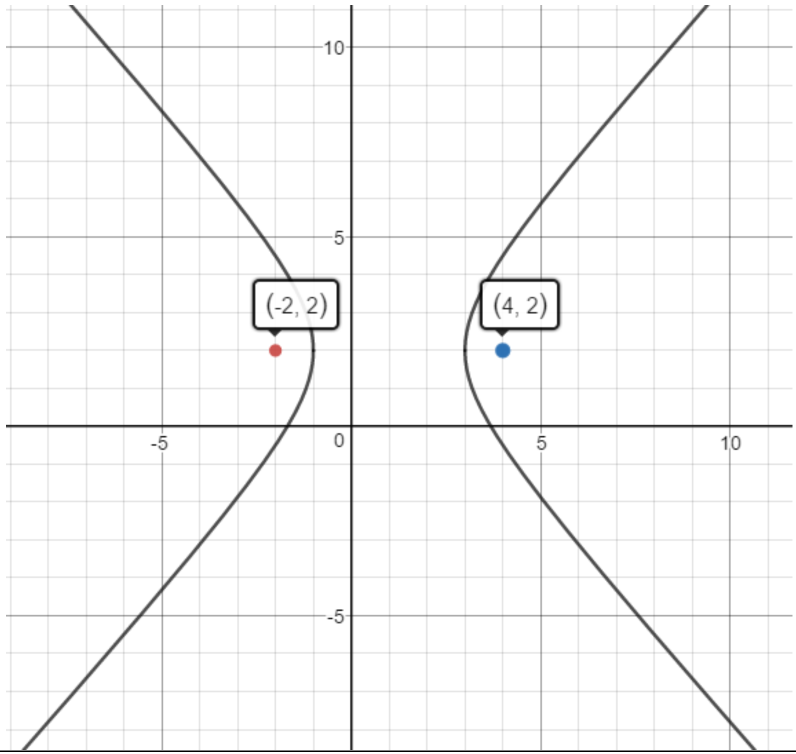
Se eleva todo al cuadrado y se desarrollan los binomios.

$$(3x-7)^2 = \left(2\sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2}\right)^2$$

$$9x^2 - 42x + 49 = 4x^2 - 32x + 64 + 4y^2 - 16y + 16$$

Finalmente se simplifica, se iguala a cero y se obtiene la ecuación la hipérbola.

$5x^2 - 4y^2 - 10x + 16y - 31 = 0$



Realiza los siguientes ejercicios.

1.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (-3,0) y (3,0), es siempre igual a 4.
2.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (-5,0) y (5,0), es siempre igual a 6.
3.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0, -7) y (0,7), es siempre igual a 12.
4.- Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (0,4) y (0,-4), es siempre igual a 5.
5.- Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (9,4) y (1,4), es siempre igual a 6.
6.- Obtén la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que se mueven de tal manera que la diferencia de sus distancias a los puntos (-3,7) y (-3,-3), es siempre igual a 8.

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen.

La hipérbola puede ser horizontal o vertical, si su centro se encuentra en el origen sus ecuaciones son las siguientes.

Hipérbola horizontal.

Ecuación canónica.

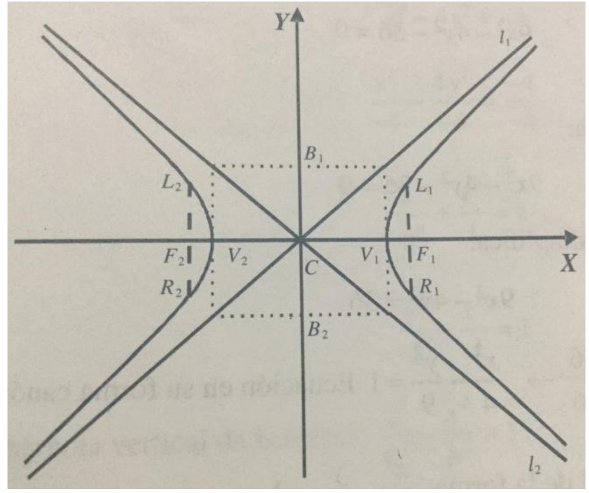
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Elementos:

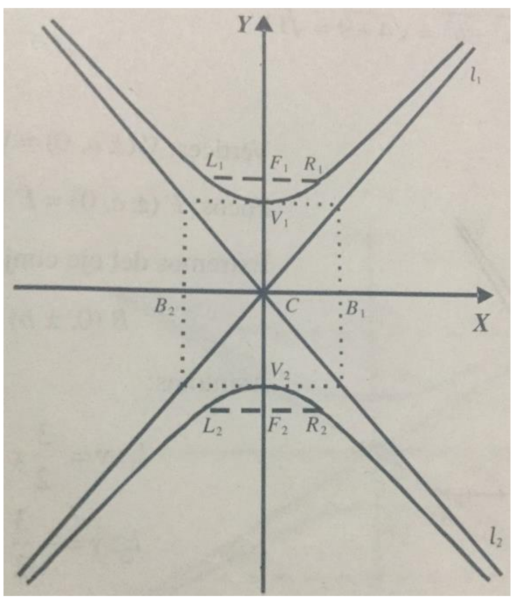
Vértices:	V(±a,0)
Focos:	F(±c,0)
Extremos del eje conjugado:	B(0, ±b)

Ecuaciones de las asíntotas.

$$l_1: y=\frac{b}{a}x \qquad l_2: y=-\frac{b}{a}x$$



Hipérbola vertical.



Ecuación canónica.

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Vértices:	V(0, ±a)
Focos:	F(0, ±c)
Extremos del eje conjugado:	B(±b, 0)

Ecuaciones de las asíntotas.

__Para hipérbolas horizontales y verticales se siguen los siguientes parámetros:__

Condición:	$c^2=a^2+b^2; c>b, c>a$
Excentricidad:	$e=\frac{c}{a} \quad (e>1)$
Lado recto:	$\overline{LR}=\frac{2b^2}{a}$
Eje transverso:	**2a**
Eje conjugado:	**2b**
Eje focal:	**2c**

Dada la ecuación, obtener los elementos de la hipérbola.

Determina los elementos y traza la gráfica de la hipérbola cuya ecuación es:

$9x^2 - 4y^2 - 36 = 0$

Se despeja el termino independiente y se divide toda la ecuación entre el mismo para obtener la ecuación canónica.

$9x^2 - 4y^2 = 36 \quad dividir\ todo\ entre\ 36 \qquad \frac{9x^2}{36} - \frac{4y^2}{36} = \frac{36}{36}$

Se simplifica la ecuación a su ecuación canónica.

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ *se observa que la ecuación representa una hipérbola horizontal de la forma*:

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

De la ecuación se obtienen los valores del semieje transverso *a* y el semieje conjugado *b*:

$a^2 = 4 \ \rightarrow a = 2 \quad y \qquad b^2 = 9 \ \rightarrow b = 3$

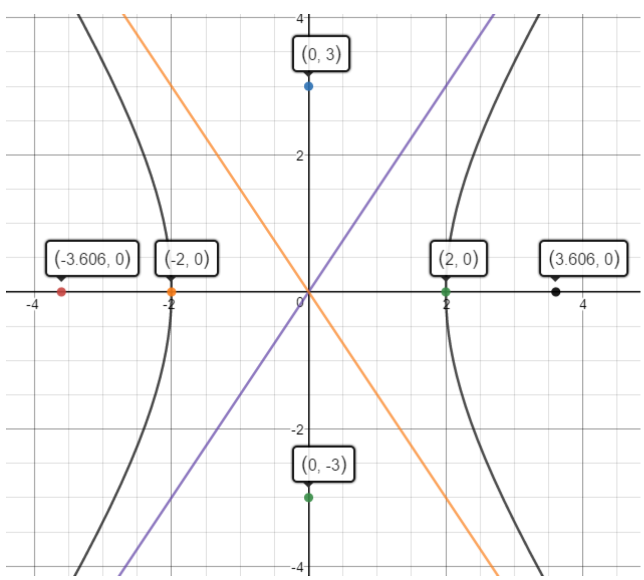
Se aplica la condición para encontrar le valor de la distancia del centro al foco (*c*).

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13} \approx 3.606$$

Se sustituyen los valores de *a, b y c* para encontrar los elementos de la hipérbola y se identifican en la gráfica.

Ejercicios:

Determina los elementos de las siguientes hipérbolas:



Elementos:

Vértices: V(± a,0) = V(± 2,0)

Focos: F(± c,0) = F(± $\sqrt{13}$,0)

Extremos del eje conjugado: B(0, ±b) = B(0, ±3)

Asíntotas:

$l_1 : y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{2}x \quad \rightarrow \quad 3x - 2y = 0$

$l_2 : y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{2}x \quad \rightarrow \quad 3x + 2y = 0$

Lado recto: $\overline{LR} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2} = \frac{18}{2} = 9$

Eje transverso: 2a = 2(2) = 4

Eje conjugado: 2b = 2(3) = 6

Eje focal: 2c = 2$\sqrt{13}$

Excentricidad: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2} \quad (e > 1)$

1.- $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$	2.- $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$
3.- $4x^2 - 5y^2 - 20 = 0$	4.- $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$
5.- $4y^2 - x^2 - 4 = 0$	6.- $x^2 - y^2 + 4 = 0$
7.- $5x^2 - 6y^2 + 30 = 0$	8.- $12x^2 - 5y^2 - 60 = 0$

1.- A partir de la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{25}$ - $\frac{y^2}{9} = 1$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

2.- A partir de la ecuación de la hipérbola 16 x^2 – 9 y^2 = 144 hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

3.- A partir de la ecuación de la hipérbola 16 $x^2 - 25y^2 = 400$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.

e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

4.- A partir de la ecuación de la hipérbola $\frac{y^2}{144}$ - $\frac{x^2}{25}$ $= 1$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

5.- A partir de la ecuación de la hipérbola 9 $y^2 - 16\ x^2 = 144$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

6.- A partir de la ecuación de la hipérbola 9 $25\ y^2 - 7\ x^2 = 175$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.

g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

7.- A partir de la ecuación de la hipérbola $36x^2 - 64y^2 + 144x + 384y - 2736 = 0$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

8.- A partir de la ecuación de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 54y - 64x - 127 = 0$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

9.- A partir de la ecuación de la hipérbola $5x^2 - 4y^2 - 20x - 8y - 4 = 0$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

11.- A partir de la ecuación de la hipérbola $16y^2 - 9\,y^2 - 32y + 54x - 209 = 0$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

12.- A partir de la ecuación de la hipérbola $4y^2 - 9\,x^2 + 8y - 54x - 113 = 0$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

13.- A partir de la ecuación de la hipérbola $5x^2 - 4\,y^2 - 10x + 24y - 51 = 0$ hallar:

a) Coordenadas del vértice.	b) Coordenadas de los focos.
c) Ecuaciones de las asíntotas.	d) La excentricidad.
e) Longitud del eje transverso.	f) Longitud del eje conjugado.
g) Longitud de cada uno de los lados rectos	h) Esboza su grafica

14.- Determine la ecuación general de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (-2, 3) y (6, 3) un foco se localiza en el punto (7, 3)

15.- Determine la ecuación general de la hipérbola cuyos focos son los putos (-2 , 3) y (-2 ,-5) y su lado recto $\frac{14}{3}$

.

Cónicas

Una cónica es el lugar geométrico de un punto que se mueve, en tal forma que su distancia a un punto fijo está en proporción constante con su distancia a una recta fija. El punto fijo es el foco, la recta fija es la directriz y la constante de proporcionalidad es la excentricidad de la cónica.

Identificación de una cónica a partir de la ecuación general

La forma general de la ecuación de cualquier cónica es:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Donde A, B, C, D, E, y F son constantes y A, B y C no son cero simultáneamente; podemos identificar este tipo de curvas representada por una ecuación en la forma general considerando las variables de segundo grado y sus coeficientes.

Hasta ahora, ninguna de las ecuaciones estudiadas contiene un término en xy; es decir, hemos tenido siempre B = 0. Para estos casos, hemos visto que:

a) La parábola contiene a x^2 o y^2, pero no ambas

b) La elipse contiene a x^2 y a y^2 pero sus coeficientes son diferentes y del mismo signo; el circulo contiene a x^2 y a y^2, los cuales tiene coeficientes iguales y del mismo signo.

c) La hipérbola contiene a los dos x^2 y y^2, pero los coeficientes de x^2 y y^2 pueden o no ser diferentes aunque si de signo contrario.

En seguida estableceremos un criterio para el caso en que “B” sea distinto de cero. Para ello utilizaremos el discriminante siguiente;

$B^2 - 4AC$ conocido también como invariante.

Para identificar, utilizando el discriminante, a una cónica, se utilizará la expresión: $I = B^2 - 4AC$, y los siguientes criterios:

a) Si $B^2 - 4AC = 0$, Es una parábola, dos rectas paralelas o una recta.

b) Si $B^2 - 4AC < 0$, Es una elipse o punto aislado. Puede ser una circunferencia si $A = C$.

c) Si $B^2 - 4AC > 0$, Es una hipérbola o dos rectas que se cortan

Nota: Hay casos en los cuales una ecuación de segundo grado puede descomponerse en dos factores de primer grado y, por lo tanto, se dibujará linealmente como un par de rectas. (ver ejercicio 4). Así pues, las cónicas degeneradas, consisten de dos rectas que se intersecten de dos rectas paralelas, una recta y un punto único.

Ejercicios resueltos

1.-) $16x^2-24xy+9y^2+20x-140y-300=0$

Solución: Utilizando el discriminante B^2 – 4AC, Para identificar la curva

B = - 24; A = 16; C = 9

Sustituyendo valores

I = B^2 – 4AC

I = $(-24)^2-4(16)(9)$

I = 576 – 576

I = 0 $\therefore$ La ecuación representa una parábola

2.-) $2x^2+8xy+9y^2+x-3y+8=0$

Solución:

B = 8; A = 2; C = 9

Sustituyendo

I = 82 – 4 (2) (9)

I = 64 – 72

I = – 8 $\therefore$ La ecuación representa una elipse

3.-) $7x^2-6\sqrt{3}\ xy+13y^2-4\sqrt{3}\ x-4y-12=0$

Solución

B = $-6\sqrt{3}$; A = 7; C = 13

Sustituyendo:

I = $(-6\sqrt{3})^2-4(7)(13)$

I = 36 (3) – 28 (13)

I = 108 – 364

I = – 256 $\therefore$ La ecuación representa una elipse

Adicional:

2xy – x + y – 3 = 0

Solución: A = 0; B = 2; C = 0

I = 22 – 4 (0) (0)

I = 4 $\therefore$ La curva representa una hipérbola

4.-) $y^2 - 4xy + 4x^2 - 2x + y - 12 = 0$

Solución: Sustituyendo coeficientes en el discriminante, tenemos:

B = -4; C = 4

I = B^2 – 4 AC

I = $(-4)^2 - 4(1)(4)$

I = 16 – 16

I = 0 represent una parabola

Sin embargo, este resultado que elimina la posibilidad de que la curva sea una hipérbola o una elipse, no garantiza que la curva sea una parábola. Para asegurarnos, tratamos la ecuación como si fuera cuadrática en "y" y aplicamos la fórmula de la ecuación cuadrática. Entonces

$$y^2 - 4xy + y + 4x^2 - 2x - 12 = 0$$

La ecuación cuadrática sería de la siguiente forma:

$Ax^2 + Bx + C$ o $Ay^2 + By + C$

Donde:

$$y^2 - (4x-1)y + (4x^2 - 2x - 12) = 0$$

Esto es:

A = 1 ; B = (4x – 1); C = $(4x^2 - 2x - 12)$

En todo caso todo queda en función de "y"

Utilizando la formula general

$$y = \frac{-(-)(4x-1) \pm \sqrt{(4x-1)^2 - 4(1)(4x^2 - 2x - 12)}}{2(1)}$$

$$y = \frac{(4x-1) \pm \sqrt{16x^2 - 8x + 1 - 16x^2 + 8x + 48}}{2}$$

$$y = \frac{(4x-1) \pm \sqrt{49}}{2}$$

$$y = \frac{4x - 1 \pm 7}{2}$$

$$y_1 = \frac{4x-1+7}{2} = \frac{4x+6}{2} = 2x+3$$

$$y2 = \frac{4x-1-7}{2} = \frac{4x-8}{2} = 2x-4$$

En consecuencia, la gráfica de la ecuación dada está constituida por dos rectas paralelas (es decir cuyas pendientes son iguales). Esto es:

y_1= 2x + 3 o y – 2x – 3 = 0

y_2= 2x – 4 o y – 2x + 4 = 0

Ejercicios

Identificar las cónicas que tienen las siguientes ecuaciones:
a) $2x^2 - xy + y^2 - x + 3y - 2 = 0$
b) $4x^2 + 3xy - 4y^2 - 12x - 18y + 4 = 0$
c) $x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y = 0$
d) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 2y - 14 = 0$
e) $3x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 11 = 0$
f) $3x^2 + 4xy - 6x + 8 = 0$

Ejercicios de reforzamiento

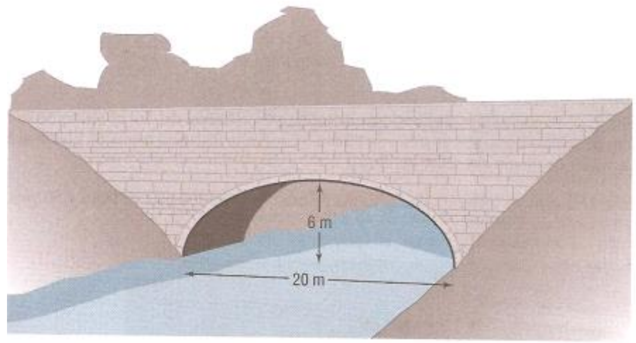
I. En los siguientes ejercicios determina la ecuación de la elipse, sus elementos y traza su gráfica
   a. Centro en C (0,0), Foco en F (-1,0), Vértice en V (3,0)
   b. Focos $(\pm 2,0)$, longitud del eje mayor 6
   c. Centro en C (2,-2), vértice en (7,-2); Foco en (4, -2)
   d. Centro en (1,2), Foco en (1,4), pasa por el punto (2,2)

II. Determina los elementos y traza la gráfica correspondiente de la elipse que tiene por ecuación las siguientes expresiones:
   a. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$
   b. $(x+5)^2 + 4(y-4)^2 = 16$
   c. $x^2 + 3y^2 - 12y + 9 = 0$
   d. $9x^2 + 18x + 4y^2 - 8y - 23 = 0$

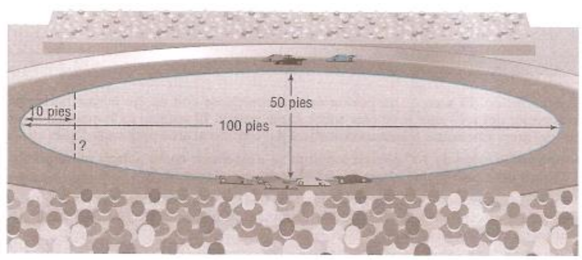
III. Resuelve los siguientes problemas:

a. **PUENTE DE UN ARCO SEMIELÍPTICO**. Un arco con la forma de la parte superior de una elipse se usa para soportar un puente que salva un río de 20 metros de ancho. El centro del arco está a 6 metros arriba del centro del río (ver figura). Escribe una ecuación para la elipse en la que el eje ***x*** coincida con el nivel del agua y el eje ***y*** pasa por el centro del arco

.



b. PISTA DE CARRERAS. Una pista de carreras tiene la forma de una elipse de 100 pies de largo y 50 pies de ancho, ¿qué ancho tiene a 10 pies de un extremo?



c. GALERÍAS. Una persona situada en un foco de una galería murmurante está a 6 pies de la pared más cercana. Su amigo está en el otro foco, a 100 pies de distancia. ¿Cuál es la longitud de esta galería murmurante? ¿Qué altura tiene el techo elíptico en el centro?

Fuentes de información electrónicas:

- https://es.khanacademy.org/math/algebra2/conics_precalc/conic_section_intro/e/recognizing_conic_sections
- https://www.youtube.com/watch?v=N8WhvRJbGC8.
- https://www.youtube.com/watch?v=zMDjlUlArqI
  https://www.youtube.com/watch?v=6jP3VRiEa-o
- http://www.intmath.com/plane-analytic-geometry/intro.php
- http://www.aulamatematicas.org/Conicas/Conicas.htm